

VISIT...

LANZAROTE  
*Caliente*.COM

Б. Г. ПОПОВ

# РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВАРИАЦИОННО-МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов  
по машино- и приборостроительным специальностям  
в качестве учебного пособия для студентов  
машино- и приборостроительных специальностей

МОСКВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА

1993

ББК ~~30.4~~

П58

УДК ~~531/534~~ 620.22-419.8

Рецензенты: чл.-корр. АН СССР В. В. Васильев,  
проф. д. т. н. А. А. Шаповалов

Попов Б. Г.

П 58 Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ, 1993. — 294 с., ил.

5-7038-0331-4

Изложены теоретические основы, численные методы и алгоритмы расчета силовых многослойных конструкций из композитных материалов. Особое внимание уделено вариационно-матричным формулировкам задач и построению конечно-элементных моделей деформирования многослойных стержней, пластины и оболочек. Теоретический материал проиллюстрирован конкретными примерами. Приведены подпрограммы на языке ФОРТРАН-4, которые могут быть использованы для решения широкого круга задач строительной механики конструкций из композитных материалов.

Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов. Может быть полезна для инженеров проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций.

Ил. 67. Табл. 12. Библиогр.: 39 назв.

ISBN 5-7038-0331-4

П  $\frac{3305000000-93}{095(2)-93}$  Без объявл.

ББК 30.4

© Б. Г. Попов, 1993.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Многослойные конструкции находят широкое применение в различных отраслях современной техники. Это связано, прежде всего, с тем, что умелым сочетанием полезных свойств отдельных слоев можно обеспечить не только высокую удельную жесткость и прочность изделия, но и удовлетворить требованиям по таким характеристикам, как теплопроводность, термостабильность, герметичность, радиопрозрачность, коррозионная стойкость и многим другим. Для достижения этих целей при подборе слоев конструктор может использовать самые различные материалы: металлические сплавы, композиты, пластмассы, пенопласты, керамики, резины и т. д. Однако следует отметить, что наличие требуемого набора исходных материалов является только необходимым, но не всегда достаточным условием. Для полной реализации возможностей, заложенных в самой идее многослойной конструкции, необходимо кроме заурядной изобретательности проявить также умение опираться на надежные методы расчета, позволяющие прогнозировать свойства и поведение будущей конструкции. Без такого анализа практически невозможно создать конструкцию, удовлетворяющую требуемому комплексу физико-механических характеристик.

В предлагаемом учебном пособии представлен достаточно общий расчетный аппарат, позволяющий решать широкий круг задач статики, устойчивости и колебаний многослойных стержней, пластин и оболочек. Рассматриваемые методы расчета названы здесь вариационно-матричными. Это объясняется тем, что для решения задач используются приемы вариационного исчисления и матричной алгебры. Сочетание таких математических процедур позволяет для сложных моделей деформирования, которые характерны для описания многослойных конструкций с неоднородной структурой и ярко выраженной анизотропией, во-первых, получать разрешающие уравнения, строго соответствующие исходным гипотезам, и, во-вторых, достаточно просто программировать алгоритмы расчетов.

Несмотря на то, что автор ориентировался на подготовленного читателя, владеющего основами теории упругости, строительной механики, вариационного исчисления, матричной алгебры и программирования, в книге детально поясняются все исход-



ные соотношения и гипотезы, формулировки задач и этапы решения. Предлагаемые примеры и вычислительные программы соответствуют рассматриваемому теоретическому материалу и способствуют более глубокой его проработке, а также развивают практические навыки расчетов.

В приложения вынесены описания и тексты используемых подпрограмм вычисления коэффициентов квадратурных формул, элементарных операций матричной алгебры, метода конечных элементов и численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей вузов машиностроительных специальностей; может быть полезным для инженеров-расчетчиков проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций.

Автор выражает свою признательность профессору Н. А. Алфутову за идею написания этой книги, рецензентам В. В. Васильеву и Л. А. Шаповалову за полезные обсуждения и ценные замечания, а также своим коллегам Э. В. Раман, Е. В. Быкову и Е. М. Петрину за помощь в редактировании текстов программ и М. А. Чернышовой за подготовку рукописи.

# 1. ВАРИАЦИОННО-МАТРИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Вариационным формулировкам в современных расчетах отводится важная роль, поскольку они позволяют получать разрешающие уравнения, строго соответствующие исходным гипотезам, и служат основой для прямых методов решения задач. В расчетах многослойных конструкций со сложными моделями деформирования графическое представление о равновесном состоянии теряет свою наглядность и простоту, в то время как методы решений, основанные на вариационных постановках проявляют свои преимущества наиболее показательным образом и, пожалуй, становятся единственно пригодными.

В разделе рассмотрены с позиций принципа возможных перемещений различные вариационные формулировки задач статики, устойчивости и динамики твердого деформируемого тела. В общем случае показано, как с использованием этих формулировок удастся получить разрешающие дифференциальные уравнения или приближенные решения.

Особое внимание уделено смешанным вариационным формулировкам двух типов. Первая соответствует смешанному вариационному принципу Рейсснера, вторая — задачам на экстремум полной потенциальной энергии системы при наличии дополнительных условий в виде дифференциальных уравнений связи между перемещениями и их производными. Для одномерных задач предлагается вариационно-матричный способ вывода канонических систем разрешающих дифференциальных уравнений. Для двумерных задач рассматриваются вопросы реализации решений с использованием проекционных методов типа Рэлея—Ритца и конечных элементов с учетом специфики смешанной вариационной формулировки.

Используемая векторно-матричная символика позволяет проследить общие этапы решения широкого круга задач, компактно записать уравнения и значительно облегчить процесс составления алгоритмов и программ расчета на ЭВМ.

## 1.1. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 1.1.1. Формулировка принципа. Линейная задача статики

Рассмотрим механическую систему, состоящую из произвольного деформируемого твердого тела и приложенных к нему распределенных объемных и поверхностных сил  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{p}$ . По поверхности  $S_u$  тело закреплено в пространстве с помощью некоторых идеальных связей, исключающих его перемещение как жесткого целого.

Будем считать, что рассматриваемая система находится в равновесии. Действительные перемещения, описывающие переход точек тела из начального ненагруженного состояния в положение равновесия, обозначим  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  (верхний индекс  $T$  — знак транспонирования здесь и далее).

Действительное напряженное состояние охарактеризуем вектор-столбцом  $\boldsymbol{\sigma}$ , компонентами которого будут нормальные и

касательные напряжения, определенные в выбранной ортогональной системе координат

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T, \quad (1.1)$$

где

$$\sigma_i = \sigma_{ii} \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3, i \neq j),$$

$\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений.

Деформированное состояние тела, вызванное действительными перемещениями, охарактеризуем вектор-столбцом  $\epsilon$ , компоненты которого — относительные удлинения и углы сдвига, определенные в выбранной системе координат

$$\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}]^T, \quad (1.2)$$

где  $\epsilon_i = \epsilon_{ii} \quad (i=1, 2, 3)$ ,

$$\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3; i \neq j),$$

$\epsilon_{ij}$  — компоненты тензора малых деформаций.

Деформации в теле будем считать достаточно малыми, объем и поверхность тела будем отождествлять с его объемом  $V$  и поверхностью  $S$  в начальном недеформированном состоянии.

Считая, что напряженное состояние соответствует положению равновесия, представим, что тело получило малые дополнительные перемещения  $\delta u$ . Будем считать, что в объеме тела функции  $\delta u$  обладают достаточной степенью гладкости и обращаются в нуль на поверхности  $S_u$ , где соответствующие перемещения запрещены. Введенные таким образом возможные перемещения не нарушают внутренних и внешних связей системы, т. е. являются кинематически (или геометрически) допустимыми.

Согласно принципу возможных перемещений работы внешних и внутренних сил на возможных перемещениях относительно равновесного состояния равны. В случае «мертвых» внешних сил их работа на возможных перемещениях определяется линейным функционалом

$$f(\delta u) = \iiint_V \delta u^T g dV + \iint_{S_p} \delta u^T p dS, \quad (1.3)$$

где  $S_p = S - S_u$  — поверхность тела, на которой заданы внешние поверхностные силы  $p$ . При подсчете работы внутренних сил учтем, что деформации  $\epsilon$  являются обобщенными перемещениями для напряжений  $\sigma$ . Поэтому при напряжениях  $\sigma$  (соответствующих состоянию равновесия) работа внутренних сил на

деформациях  $\delta \mathbf{e}$ , вызываемых возможными перемещениями  $\delta \mathbf{u}$ , будет равна

$$a = \iiint_V \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.4)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений  $a = \dot{f}$ . Тогда, используя выражения (1.3) и (1.4), получим уравнение в вариациях, представляющее математическую формулировку принципа возможных перемещений для деформируемого твердого тела

$$\iiint_V \delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iiint_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) позволяет получить дифференциальные уравнения равновесия и обеспечивает выполнение граничных условий. Относительно граничных условий следует заметить, что в (1.5), во-первых, подразумевается, что действительные и возможные перемещения удовлетворяют главным (кинематическим) условиям на  $S_u$ , т. е.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ ,  $\delta \mathbf{u} = 0$ , во-вторых, внешние поверхностные силы  $\mathbf{p}$ , определяющие естественные (силовые) граничные условия на поверхности  $S_p$ , непосредственно входят в функционал работы внешних сил. Для получения уравнений равновесия необходимо конкретизировать связь между деформациями и перемещениями и выполнить операции интегрирования по частям. Такой прием получения уравнений равновесия и задания граничных условий оказывается весьма удобным для получения разрешающих уравнений различных вариантов приближенных теорий, основанных на сложных кинематических гипотезах деформирования.

Для линейных задач связь деформаций с перемещениями в общем случае задается линейным соотношением

$$\mathbf{e} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{L}$  — матрица линейных дифференциальных операторов. Связь возможных деформаций с возможными перемещениями определяется аналогичным образом  $\delta \mathbf{e} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}$ . Тогда формулировка принципа возможных перемещений (1.5) запишется так:

$$\iiint_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \iiint_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS. \quad (1.7)$$

Для получения уравнений равновесия избавимся от дифференциальных операторов  $\mathbf{L}$  при возможных перемещениях  $\delta \mathbf{u}$ . Для этого первое слагаемое в (1.7) проинтегрируем по частям, в результате чего получим следующее уравнение в вариаци-

циях, которое должно выполняться для любых возможных перемещений  $\delta u$ :

$$\iiint_V \delta u^T (L^* \sigma - g) dV + \iint_{S_p} \delta u^T (L^v \sigma - p) dS = 0, \quad (1.8)$$

где  $L^*$  — матрица сопряженных дифференциальных операторов;  $L^v$  — матрица направляющих косинусов. Поскольку уравнение (1.8), как было сказано выше, должно выполняться для любых функций  $\delta u$ , принадлежащих области возможных перемещений, то из него следует дифференциальные уравнения равновесия в любой точке объема  $V$

$$L^* \sigma - g = 0 \quad (1.9)$$

и силовые граничные условия

$$L^v \sigma - p = 0 \text{ на поверхности } S_p. \quad (1.10)$$

Нетрудно показать, что принцип возможных перемещений (1.7) можно было бы не постулировать, а получить из уравнений равновесия (1.9) и (1.10). Для этого их следовало умножить на  $\delta u^T$  и представить в эквивалентной интегральной форме (1.8). После интегрирования по частям (1.8) с учетом самосопряженности оператора  $L$  получим уравнение (1.7).

### 1.1.2. Метод перемещений для линейно-упругого тела

В случае отсутствия температурных деформаций для линейно-упругого тела связь напряжений с деформациями определяется законом Гука

$$\sigma = C \varepsilon, \quad (1.11)$$

где  $C$  — симметричная положительно определенная матрица коэффициентов упругости. Тогда с учетом (1.6) напряжения  $\sigma$  можно связать с перемещениями  $u$ :

$$\sigma = C L u \quad (1.12)$$

и сформулировать задачу определения напряженно-деформированного состояния в виде дифференциального уравнения равновесия, записанного через перемещения, для любой точки объема  $V$

$$L^* C L u - g = 0 \quad (1.13)$$

и граничных условий:

силовых на поверхности  $S_p$

$$L^v C L u - p = 0 \quad (1.14)$$

и кинематических на поверхности  $S_u$

$$u = u_0. \quad (1.15)$$

Интегральные формулировки задачи, эквивалентные (1.13) — (1.15), будут записываться следующим образом:

1) согласно (1.8): требуется найти такие  $\mathbf{u}$ , при которых выполняется уравнение

$$\iiint_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}^* \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{g}) dV + \iint_{S_p} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}^v \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{p}) dS = 0 \quad (1.16)$$

для любых возможных перемещений  $\delta \mathbf{u}$ ;

2) согласно (1.7): требуется найти такие  $\mathbf{u}$ , при которых выполняется уравнение

$$\iiint_V ((\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}) dV - \iint_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0 \quad (1.17)$$

для любых возможных перемещений  $\delta \mathbf{u}$ .

Отметим, что области возможных перемещений  $\delta \mathbf{u}$  для формулировок задач (1.16) и (1.17) отличаются по требованиям гладкости. При построении приближенных решений часто отдают предпочтение формулировке (1.17), поскольку она предъявляет наименее жесткие требования гладкости и содержит симметричную билинейную форму.

Формулировку задачи (1.17) иногда записывают в следующем виде. Среди функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям, требуется найти такие перемещения  $\mathbf{u}$ , для которых при любых возможных перемещениях  $\delta \mathbf{u}$  выполняется равенство

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = f(\delta \mathbf{u}), \quad (1.18)$$

где

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \iiint_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV \quad (1.19)$$

— непрерывная и положительно определенная билинейная форма, а линейный функционал  $f(\delta \mathbf{u})$  представляет работу внешних сил на возможных перемещениях и имеет вид (1.3).

Формулировку (1.18) можно назвать вариационной, поскольку она эквивалентна задаче о нахождении минимума функционала полной потенциальной энергии системы

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{u}), \quad (1.20)$$

где

$$\frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{L} \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV$$

— потенциальная энергия деформации системы, а

$$-f(\mathbf{u}) = -\iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \iint_{S_p} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS$$

— потенциальная энергия внешних сил.

Получим вариационную формулировку линейной задачи статики при совместном действии силового нагружения и нагрева. Будем считать, что предварительным решением задачи теплопроводности уже определены температуры, и температурные деформации  $\epsilon_T$  в теле известны, т. е. рассматривается несвязанная задача термоупругости. В этом случае при записи соотношений упругости следует исключить из полных деформаций  $\mathbf{L}\mathbf{u}$  температурные деформации  $\epsilon_T$ , т. е. вместо (1.12) воспользоваться соотношением

$$\sigma = \mathbf{C}(\mathbf{L}\mathbf{u} - \epsilon_T)$$

или

$$\sigma = \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{u} - \sigma_T, \quad (1.21)$$

где  $\sigma_T = \mathbf{C}\epsilon_T$ .

Подстановка (1.21) в (1.5) с учетом того, что  $\delta\epsilon = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}$ , приводит к вариационной формулировке задачи (1.18), где  $a(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u})$  определяется согласно (1.19), а линейный функционал  $f(\delta\mathbf{u})$  содержит слагаемые, характеризующие как силовое, так и температурное воздействия:

$$f(\delta\mathbf{u}) = \iiint_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \sigma_T dV. \quad (1.22)$$

Соответствующая (1.18), (1.22) формулировка задачи в дифференциальной форме будет иметь следующий вид: уравнения равновесия для любой точки объема  $V$

$$\mathbf{L}^* \mathbf{C}(\mathbf{L}\mathbf{u} - \epsilon_T) - \mathbf{g} = 0, \quad (1.23)$$

силовые граничные условия на поверхности  $S_p$

$$\mathbf{L}^* \mathbf{C}(\mathbf{L}\mathbf{u} - \epsilon_T) - \mathbf{p} = 0. \quad (1.24)$$

Кинематические граничные условия соответствуют (1.15).

Вариационными формулировками также удобно пользоваться при решении задач о колебаниях. В этом случае математическую запись принципа возможных перемещений (1.5) следует формально дополнить работой сил инерции (определенных согласно принципу Даламбера) на возможных перемещениях. Таким образом, вместо (1.5) получим

$$\iiint_V \delta\epsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS - \iiint_V \delta\mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV, \quad (1.25)$$

где  $\delta\epsilon = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}$ ;  $\ddot{\mathbf{u}}$  — вторая производная от  $\mathbf{u}$  по времени  $\tau$ ;  $\rho$  — удельная плотность материала. Входящие в (1.25) функции возможных перемещений, деформаций и силовых факторов должны рассматриваться как функции пространственных координат и времени. Для решения задач динамики уравнение (1.25)

дополняется начальными условиями, представляющими распределение перемещений и скоростей всех точек тела в начальный момент времени  $\tau=0$ .

### 1.1.3. Решение задач статики методами Рэлея—Ритца и конечных элементов

Рассмотрим последовательность решения методом Рэлея—Ритца задачи статики твердого деформируемого тела, нагруженного внешними силами и находящегося под тепловым воздействием. Вариационная формулировка, соответствующая (1.18), (1.19), (1.22), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} dV &= \iiint_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \\ &+ \iint_{S_p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathbf{C} \varepsilon_\tau dV. \end{aligned} \quad (1.26)$$

При решении задачи (1.26) методом Рэлея—Ритца или методом конечных элементов (МКЭ) поле перемещений  $\mathbf{u}$  аппроксимируют в виде (при  $\mathbf{u}_0=0$  на поверхности  $S_u$ )

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \Phi \mathbf{q}, \quad (1.27)$$

где  $\Phi$  — матрица функций формы;  $\mathbf{q}$  — вектор-столбец обобщенных перемещений (для МКЭ) или коэффициентов аппроксимации для метода Рэлея—Ритца. Аналогичным образом аппроксимируют возможные перемещения

$$\delta\mathbf{u} \approx \delta\mathbf{u}_h = \Phi \delta\mathbf{q}, \quad (1.28)$$

где  $\delta\mathbf{q}$  — вектор-столбец произвольных коэффициентов. Подстановка (1.27), (1.28) в (1.26) приводит к уравнению

$$\delta\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{P}, \quad (1.29)$$

где

$$\mathbf{K} = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi); \quad (1.30)$$

$$\mathbf{P} = \iiint_V \Phi^T \mathbf{g} dV + \iint_{S_p} \Phi^T \mathbf{p} dS + \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \varepsilon_\tau dV. \quad (1.31)$$

Матрицу  $\mathbf{K}$  (1.30) называют матрицей жесткости, вектор  $\mathbf{P}$  (1.31) — вектором приведенных сил. Из-за произвольности компонент вектор-столбца  $\delta\mathbf{q}$  уравнение (1.29) позволяет получить разрешающую систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}. \quad (1.32)$$

После решения (1.32) определяются обобщенные перемещения (или коэффициенты аппроксимации решения)  $\mathbf{q}$ . Далее по ним



вычисляются распределения перемещений  $u = \Phi q$ , деформаций  $\varepsilon = Bq$  и напряжений  $\sigma = C(Bq - \varepsilon_r)$ .

Дадим теоретическую оценку погрешности изложенного выше метода. Будем считать коэффициенты при дифференциальных операторах в матрице  $L$ , связывающей деформации с перемещениями (1.6), и коэффициенты симметричной положительно определенной матрицы соотношений упругости  $C$  (1.11) ограниченными. Рассмотрим случай когда  $u_0 = 0$  на  $S_u$ . Для меры функций  $\delta u$  введем энергетическую норму  $\|\delta u\|$ , которую определим следующим образом:

$$\|\delta u\|^2 = \iiint_V (L\delta u)^T C L \delta u dV. \quad (1.33)$$

Отметим, что поскольку возможные перемещения исключают функции, соответствующие смещению тела как жесткого целого (рассматриваемое тело закреплено в пространстве), то  $\|\delta u\| > 0$  и  $\|\delta u\| = 0$  лишь для  $\delta u = 0$ . Тогда для билинейной формы (1.19) выполняются условия непрерывности

$$a(\delta u, u) \leq M \|\delta u\| \|u\|, \quad (1.34)$$

где константа  $M > 0$ ,

и положительной определенности

$$a(\delta u, \delta u) > \alpha \|\delta u\|^2. \quad (1.35)$$

В этом случае согласно теореме Лакса—Мильграма [29, 39] существует единственное решение  $u$  задачи (1.18), причем  $\|u\| < \frac{1}{\alpha} \|f\|$ , где  $\|f\| = |f(\delta u)| / \|\delta u\|$  определяет норму действующих внешних сил.

При конечном числе  $N$  аппроксимирующих функций в общем случае, естественно, нельзя точно воспроизвести любые возможные перемещения. Приближенное решение задачи  $u_h$  ищется среди подмножества функций возможных перемещений  $\delta u_h$ . Но набор аппроксимирующих функций при  $N$ , стремящемся к бесконечности, должен удовлетворять условиям полноты. Тогда можно построить последовательность решений задач

$$a(\delta u_h, u_h) = f(\delta u_h), \quad (1.36)$$

таких, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u_h\| = 0$ , где  $\delta u_h$  — конечно-мерное подпространство функций возможных перемещений;  $u_h, u$  — приближенное и точное решения задачи.

С использованием точной формулировки задачи (1.18) и приближенной (1.36) можно оценить ошибку решения  $\Delta u = u - u_h$ . Поскольку (1.18) справедливо для любых  $\delta u$ , в том числе и для  $\delta u_h$ , то можно записать, что

$$a(\delta u_h, u_h) = f(\delta u_h). \quad (1.37)$$

Вычтем из (1.37) уравнение (1.36), тогда обнаружится свойство обобщенной ортогональности ошибки

$$a(\delta u_h, \Delta u) = 0 \quad (1.38)$$

для любых  $\delta u_h$ , которое указывает на то обстоятельство, что ошибка  $\Delta u$  не может быть разложена по выбранной системе аппроксимирующих функций.

С использованием условий непрерывности (1.34), положительной определенности (1.35) и ортогональности (1.38) можно дать априорную оценку ошибки решения

$$\begin{aligned} \alpha \|\Delta u\|^2 &\leq a(\Delta u, \Delta u) = a(u - u_h + \delta u_h - \delta u_h, \Delta u) = \\ &= a(u - \delta u_h, \Delta u) - a(u_h - \delta u_h, \Delta u) = \\ &= a(u - \delta u_h, \Delta u) \leq M \|u - \delta u_h\| \|\Delta u\|. \end{aligned}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функции  $u_h - \delta u_h$  и  $\delta u_h$  принадлежат одному подмножеству функций возможных перемещений, для которого ошибка  $\Delta u$  ортогональна. Отсюда следует, что для любых функций  $\delta u_h$  значение  $\|\Delta u\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \delta u_h\|$ . Таким образом, ошибка решения  $\Delta u$ , измеренная в энергетической норме, ограничена сверху величиной расстояния от точного решения  $u$  до любой функции  $\delta u_h$  из конечномерного подпространства функций возможных перемещений. Этот результат сводит задачу исследования сходимости к оценке расстояний ( $\|u - \delta u_h\|$ ) в нормированных пространствах, т. е. к оценке интерполяционных свойств аппроксимирующих функций.

Оценки погрешности различных интерполяций, в том числе и конечно-элементных, достаточно хорошо изучены. Если в качестве базисных функций для конечных элементов выбраны полные полиномы степени  $m$  и область интерполяции имеет равномерную разбивку с характерным размером конечного элемента  $h$ , то можно показать, что максимальную асимптотическую (при  $h \rightarrow 0$ ) погрешность по энергетической норме (1.33) можно оценить как

$$\|\Delta u\| = ch^\mu, \quad (1.39)$$

где  $\mu = m - p + 1$ ;  $p$  — максимальный порядок дифференциальных операторов, содержащихся в матрице  $L$  (см. (1.6), (1.33)), с помощью которой определена норма;  $c$  — константа, зависящая от точного решения задачи и не зависящая от  $h$ .

Из (1.39) следует, что в логарифмических координатах зависимость  $\log \|\Delta u\|$  от  $\log h$  будет представлять прямую линию, тангенс угла наклона которой равен порядку скорости сходимости  $\mu$ . При отработке новых конечных элементов такие оценки скорости сходимости необходимо проводить при решении тестовых задач. При этом следует помнить, что (1.39) получено для асимптотической скорости сходимости.

### 1.1.4. Решение задач динамики

Решение задач динамики с помощью метода Рэлея—Ритца (или МКЭ) возможно на основе формулировки (1.25). Формальное отличие от рассмотренного выше уравнения задачи статики (1.32) состоит в определении приведенных инерционных нагрузок системы. Для этого отдельно рассмотрим лишь последнее слагаемое в (1.25). Воспользуемся аппроксимацией перемещений такой же, как (1.27), тогда, выполнив интегрирование по объему, получим

$$\iiint_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}},$$

где

$$\mathbf{M} = \iiint_V \rho \Phi^T \Phi dV \quad (1.40)$$

— матрица приведенных масс.

С учетом определений матрицы жесткости (1.30), вектора приведенных нагрузок (1.31) и матрицы приведенных масс (1.40) искомое уравнение движения системы примет следующий вид:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (1.41)$$

где считается, что  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\tau)$  — известная функция от времени, а обобщенные перемещения  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau)$  подлежат определению. Начальными условиями для задачи определены  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$  при  $\tau = 0$ . Для численного решения уравнения движения известно большое число шаговых численных методов. Конечно-разностные операторы по времени, представляющие ускорение  $\mathbf{q}$ , разделяются на две группы: условно устойчивые и безусловно устойчивые.

К группе условно устойчивых относится метод центральных разностей. Для этого метода вектор-столбец обобщенных ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}$  в момент времени  $\tau + j\Delta\tau$ , где  $j$  — номер временного шага,  $\Delta\tau$  — величина временного шага, аппроксимируется в виде

$$\ddot{\mathbf{q}}_j = (\mathbf{q}_{j+1} - 2\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j-1}) / \Delta\tau^2 \quad (1.42)$$

Подстановка (1.42) в уравнение движения (1.41) приводит к системе алгебраических уравнений, которая позволяет определять обобщенные перемещения в момент времени  $(j+1)\Delta\tau$

$$\mathbf{M} \mathbf{q}_{j+1} = (2\mathbf{M} - \Delta\tau^2 \mathbf{K}) \mathbf{q}_j - \mathbf{M} \mathbf{q}_{j-1} + \mathbf{P}_j \Delta\tau^2,$$

где  $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}(\tau = j\Delta\tau)$  — значение вектор-столбца приведенных нагрузок в момент времени  $j\Delta\tau$ .

Условно устойчивые методы становятся неустойчивыми, если шаг интегрирования  $\Delta\tau$  выбран больше некоторого критического значения.

К группе безусловно устойчивых методов относится метод Хубольта (достаточно часто и успешно применяется в расчетной практике). Этот метод устойчив вне зависимости от выбора величины шага по времени, однако при этом усложняется процесс интегрирования и возникает влияние фиктивного затухания, вносимого в модель конечно-разностным оператором. При решении методом Хубольта вектор-столбец обобщенных ускорений  $\mathbf{q}$  в момент времени  $\tau = j\Delta\tau$  аппроксимируется в разностном виде с интерполированием назад:

$$\dot{\mathbf{q}}_j = (2\mathbf{q}_j - 5\mathbf{q}_{j-1} + 4\mathbf{q}_{j-2} - \mathbf{q}_{j-3})/\Delta\tau^2. \quad (1.43)$$

Подстановка (1.43) в (1.41) (при  $\tau = j\Delta\tau$ ) приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{M}) \mathbf{q}_j = \mathbf{M}(\alpha_2 \mathbf{q}_{j-1} + \alpha_3 \mathbf{q}_{j-2} + \alpha_4 \mathbf{q}_{j-3}) + \mathbf{P}_j,$$

где

$$\alpha_1 = 2/\Delta\tau^2; \alpha_2 = 5/\Delta\tau^2; \alpha_3 = -4/\Delta\tau^2; \alpha_4 = 1/\Delta\tau^2.$$

На начальных этапах решения задачи динамики методом Хубольта для  $j=1$  необходимо задать кроме начальных условий  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$  также значения  $\mathbf{q}_{-1}$ ,  $\mathbf{q}_{-2}$ . Их можно определить из следующих уравнений:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = (11\mathbf{q}_1 - 18\mathbf{q}_0 + 9\mathbf{q}_{-1} - 2\mathbf{q}_{-2})/(6\Delta\tau); \quad (1.44)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\mathbf{q}_1 - 2\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_{-1})/\Delta\tau^2,$$

где вектор-столбец начальных ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  вычисляется из уравнений движения в начальный момент времени  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{q}_0 = \mathbf{P}_0$ . В частном случае при нулевых начальных условиях  $\mathbf{q}_0 = 0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$  и при отсутствии нагрузки  $\mathbf{P}_0 = 0$ , ( $\ddot{\mathbf{q}}_0 = 0$ ) из (1.44) получим  $\mathbf{q}_{-1} = -\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_{-2} = -8\mathbf{q}_1$ .

Определенных рекомендаций для выбора временного шага  $\Delta\tau$  практически не существует. Для того, чтобы избежать существенного влияния, привносимого фиктивным затуханием, на тона с диапазоном частот меньше  $\omega_*$ , шаг интегрирования ориентировочно подбирают, как  $\Delta\tau < 1/(4\omega_*)$ .

При решении задач динамики для линейно-упругих систем кроме численного интегрирования по времени часто используют метод разложения по собственным формам (метод модальной суперпозиции). Для дифференциального уравнения (1.41) вначале решается однородное уравнение

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0. \quad (1.45)$$

Решение (1.45) можно искать в форме

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_i^0 \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (1.46)$$

где  $\omega_i$  — угловая частота;  $\varphi_i$  — фазовый угол;  $q_i^0$  — амплитуды собственного вектора  $i$ -й формы собственных колебаний. Подстановка (1.46) в (1.45) приводит к обобщенной задаче на собственные значения

$$(K - \omega_i^2 M) q_i^0 = 0. \quad (1.47)$$

Аналогично для  $j$ -й формы

$$(K - \omega_j^2 M) q_j^0 = 0. \quad (1.48)$$

Из (1.47), (1.48) легко обнаружить свойства обобщенной ортогональности собственных векторов. Действительно, выполнив скалярные умножения (1.47) на  $q_j^0$  и (1.48) на  $q_i^0$ , получим

$$(q_j^0)^T K q_i^0 = \omega_i^2 (q_j^0)^T M q_i^0; \quad (1.49)$$

$$(q_i^0)^T K q_j^0 = \omega_j^2 (q_i^0)^T M q_j^0.$$

Поскольку матрицы  $K$  и  $M$  симметричны, то  $(q_j^0)^T K q_i^0 = (q_i^0)^T K q_j^0$  и  $(q_j^0)^T M q_i^0 = (q_i^0)^T M q_j^0$ . Тогда из (1.49) следует, что

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) (q_i^0)^T M q_j^0 = 0$$

или

$$(q_i^0)^T M q_j^0 = 0 \quad \text{для } i \neq j$$

и

$$(q_i^0)^T K q_j^0 = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad (1.50)$$

что соответствует свойствам обобщенной ортогональности собственных векторов  $q_i^0$  и  $q_j^0$ .

Если выполнить нормализацию собственных векторов относительно матрицы масс так, чтобы

$$(q_i^0)^T M q_i^0 = 1, \quad (1.51)$$

то из (1.49) с учетом (1.50) и (1.51) получим

$$(q_i^0)^T K q_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j; \\ \omega_i^2 & \text{для } i = j. \end{cases} \quad (1.52)$$

Если из  $k$  нормированных векторов сформировать матрицу

$$Q_0 = [q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0], \quad (1.53)$$

то свойства (1.50) — (1.52) можно представить в следующем матричном виде:

$$Q_0^T M Q_0 = E_{(k \times k)};$$

$$Q_0^T K Q_0 = \Omega, \quad (1.54)$$

где  $\Omega = [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_k^2]$  — диагональная матрица, содержащая в качестве коэффициентов квадраты собственных частот системы;  $E_{(k \times k)}$  — единичная матрица размерности  $(k \times k)$ .

Вернемся к решению неоднородного уравнения движения (1.41). Решение  $q(\tau)$  будем искать в виде разложения по собственным формам колебаний системы, т. е. примем

$$q(\tau) = Q_0 d(\tau), \quad (1.55)$$

где матрица  $Q_0$  определена согласно (1.53);  $d(\tau)$  — вектор-столбец искомых множителей. Подстановка (1.55) в уравнение движения (1.41) приводит к уравнению

$$MQ_0 \ddot{d} + KQ_0 d = P. \quad (1.56)$$

После умножения (1.56) на транспонированную матрицу форм  $Q_0^T$  с учетом (1.54) получим

$$\ddot{d} + \Omega d = Q_0^T P. \quad (1.57)$$

Полученное (матричное) дифференциальное уравнение (1.57) значительно проще исходного (1.41), поскольку матрицы  $\Omega$  является диагональной и допускает независимое интегрирование отдельного коэффициента  $d_i$  искомого вектора  $d$

$$\ddot{d}_i + \omega_i^2 d_i = f_i(\tau), \quad (1.58)$$

где  $f_i(\tau) = (q_i^0)^T P(\tau)$ . В качестве начальных условий для интегрирования (1.57) будут служить выражения  $d(0) = Q_0^T M q(0)$ ;  $\dot{d}(0) = Q_0^T M \dot{q}(0)$ .

При решении (1.58) обычно поступают следующим образом. Разбивают интервал интегрирования по времени на отдельные участки. В пределах участка используют аналитическое решение. Решение  $q(\tau)$  восстанавливается согласно (1.55).

## 1.2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ СМЕШАННОГО ТИПА

### 1.2.1. Принцип возможных изменений напряженного состояния

Представим связь деформаций с перемещениями (1.6) в виде уравнения

$$Lu - \varepsilon = 0. \quad (1.59)$$

С помощью неопределенных множителей Лагранжа  $\delta\sigma$  (которые по физическому смыслу представляют возможные напряжения) введем в математическую формулировку принципа возможных перемещений (1.7) уравнение связи (1.59)

$$\begin{aligned} & \iiint_V (L\delta u)^T \sigma dV - \iiint_V \delta u^T g dV - \\ & - \iint_{S_p} \delta u^T p dS + \iiint_V \delta \sigma^T (Lu - \varepsilon) dV = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Относительно напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$ , присутствующих в уравнении (1.60), будем считать, что, во-первых, напряжения соответствуют равновесному состоянию и (1.7) удовлетворяется для любых возможных перемещений  $\delta u$ , и, во-вторых, деформации  $\varepsilon$  однозначно определяются через напряжения  $\sigma$  соотношениями упругости, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ . Тогда из (1.60) следует, что для равновесного состояния деформируемого тела должно выполняться уравнение

$$\iiint_V \delta \sigma^T (L u - \varepsilon) dV = 0. \quad (1.61)$$

В уравнении (1.61) рассмотрим отдельно слагаемое, содержащее произведение  $\delta \sigma^T L u$ . Выполним для него интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \sigma^T L u dV &= \iiint_V (L u)^T \delta \sigma dV = \iiint_V u^T L^* \delta \sigma dV + \\ &+ \iint_{S_u} u_0^T L^v \delta \sigma dS + \iint_{S_p} u^T L^v \delta \sigma dS, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$L u - \varepsilon = 0. \quad (1.59)$$

где  $L^*$  и  $L^v$  — матрицы сопряженных дифференциальных операторов и направляющих косинусов (соответствующие матрице  $L$ );  $u_0$  — заданные перемещения на поверхности  $S_u$ . Из (1.62) следует, что, если в качестве возможных напряжений рассматривать такие  $\delta \sigma$ , для которых в любой точке объема  $V$

$$L^* \delta \sigma = 0 \quad (1.63)$$

и на поверхности  $S_p$

$$L^v \delta \sigma = 0, \quad (1.64)$$

то

$$\iiint_V \delta \sigma^T L u dV = \iint_{S_u} u_0^T L^v \delta \sigma dS.$$

В этом случае уравнение (1.61) принимает следующий вид:

$$\iiint_V \delta \sigma^T \varepsilon dV = \iint_{S_u} u_0^T L^v \delta \sigma dS. \quad (1.65)$$

В частном случае, когда  $u_0 = 0$ , получим

$$\iiint_V \delta \sigma^T \varepsilon dV = 0. \quad (1.66)$$

Полученные уравнения (1.65) и условия на  $\delta \sigma$  в виде уравнений (1.63) и (1.64) представляют математические формулировки принципа возможных изменений напряженного состояния. Из уравнений (1.63) и (1.64) следует, что в качестве возможных

напряжений  $\delta\sigma$  могут выступать только самоуравновешенные напряжения, причем такие, которые на поверхности  $S_p$  не нарушают силовых граничных условий. Следует помнить, что фигурирующие в уравнениях (1.65) и (1.66) деформации  $\epsilon$  соответствуют напряжениям  $\sigma$ , удовлетворяющим уравнениям равновесия (1.9) и силовым граничным условиям (1.10).

Можно показать, что уравнения принципа возможных изменений напряженного состояния (1.65), (1.66) приводят к условиям совместности. Для этого напряжения  $\delta\sigma$  нужно выразить через функции напряжений (функции Эри, Максвелла, Морера), т. е. представить  $\delta\sigma = W\delta s$  (где  $W$  — прямоугольная матрица дифференциальных операторов, такая, что  $L^*W = 0$ ;  $\delta s$  — вектор-столбец независимых функций напряжений) и выполнить интегрирование по частям.

Для линейно-упругого тела, материал которого при деформировании подчиняется закону Гука (1.11), деформации  $\epsilon$  определяются через напряжения  $\epsilon = C^{-1}\sigma$ , где  $C^{-1}$  — матрица коэффициентов податливости. Тогда вариационная формулировка принципа возможных изменений напряженного состояния, соответствующая (1.65), принимает вид

$$\iiint_V \delta\sigma^T C^{-1}\sigma dV = \iint_{S_u} u_0^T L^v \delta\sigma dS \quad (1.67)$$

и (при  $u_0 = 0$ ) для (1.66)

$$\iiint_V \delta\sigma^T C^{-1}\sigma dV = 0. \quad (1.68)$$

Уравнения (1.67) и (1.68) можно назвать вариационными, поскольку они соответствуют задачам о нахождении минимумов функционалов

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} c(\sigma, \sigma) - \psi(\sigma)$$

и (1.69)

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} c(\sigma, \sigma),$$

$$\text{где } \frac{1}{2} c(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma^T C^{-1}\sigma dV; \quad \psi(\sigma) = \iint_{S_u} u_0^T L^v \sigma dS.$$

Функционал  $I(\sigma)$  (1.69) носит название полной дополнительной энергии [10]. Уравнение (1.67) или (1.68) позволяет получить уравнения метода сил, рассматриваемые в курсе сопротивления материалов.



### 1.2.2. Независимые перемещения и напряжения

Формулировку задачи статики с помощью принципа возможных перемещений, дополненного условиями связи деформаций с перемещениями (1.60), можно рассматривать как смешанную. Для линейно-упругого тела (1.60) принимает вид

$$\iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV - f(\delta\mathbf{u}) + \iiint_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) dV = 0, \quad (1.70)$$

где  $f(\delta\mathbf{u})$  — линейный функционал работы внешних сил на возможных перемещениях (1.3). Уравнение (1.70) представляет математическую формулировку принципа Хеллингера — Рейснера [10, 27]. К независимому варьированию в (1.70) допускаются как перемещения, так и напряжения. Из-за произвольности  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  (1.70) распадается на два уравнения

$$\iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = f(\delta\mathbf{u}); \quad (1.71)$$

$$\iiint_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) dV = 0. \quad (1.72)$$

Таким образом, смешанную вариационную формулировку задачи статики можно представить в следующем виде. Требуется найти такую пару вектор-функций  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ , для которых при любых допустимых возможных перемещениях  $\delta\mathbf{u}$  и напряжениях  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  выполняются вариационные уравнения

$$b(\delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = f(\delta\mathbf{u}); \quad (1.73)$$

$$b(\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\sigma}) - c(\delta\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (1.74)$$

где

$$b(\delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \iiint_V (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV;$$

$$b(\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\sigma}) = \iiint_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}\mathbf{u} dV;$$

$$c(\delta\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \iiint_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} dV.$$

Нетрудно заметить, что задача (1.73), (1.74) соответствует задаче о седловой точке функционала

$$J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = b(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2} c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - f(\mathbf{u}).$$

По физическому смыслу условие (1.71), или (1.73), требует выполнения уравнений равновесия, а (1.72), или (1.74), — уравнений совместности. Для приближенных аппроксимаций напряжений и перемещений уравнения связи деформаций  $\mathbf{L}\mathbf{u}$  и напря-

жений  $\sigma$  ( $\mathbf{L}\mathbf{u}=\mathbf{C}^{-1}\sigma$ ), а также уравнения равновесия  $\mathbf{L}^*\sigma=\mathbf{g}$  могут точно не выполняться, однако условие (1.72) позволяет получить интегральные соотношения упругости, которые в дальнейшем могут использоваться в интегральных уравнениях равновесия (1.71).

Иногда при решении задач бывает удобно аппроксимировать не все компоненты тензора напряжений, а только часть из них, например напряжения поперечного сдвига и обжатия в многослойных тонкостенных элементах конструкций. Представим  $\sigma=[\sigma_1^T, \sigma_2^T]^T$  и  $\varepsilon=[\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T]^T$ . Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\iiint_V (\delta \varepsilon_1^T \sigma_1 + \delta \varepsilon_2^T \sigma_2 + \delta \sigma_2^T \varepsilon_2 - \delta \sigma_2^T \varepsilon_2) dV - f(\delta \mathbf{u}) = 0. \quad (1.75)$$

Соотношения упругости запишем в блочном виде

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2; \quad (1.76)$$

$$\sigma_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2, \quad (1.77)$$

где  $C_{11}=C_{11}^T$  ( $1 \nrightarrow 2$ );  $C_{21}=C_{12}^T$ . Из (1.77) определим  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_2 = C_{22}^{-1}\sigma_2 - C_{22}^{-1}C_{21}\varepsilon_1. \quad (1.78)$$

Деформации  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  могут быть выражены через перемещения  $\mathbf{u}$ :

$$\varepsilon_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{u} \quad (1 \nrightarrow 2). \quad (1.79)$$

Тогда с учетом (1.76)–(1.79) уравнение (1.75) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\delta \varepsilon_1^T C_{11}^* \varepsilon_1 + (\delta \varepsilon_2^T + \delta \varepsilon_1^T C_{12} C_{22}^{-1}) \sigma_2 + \\ & + \delta \sigma_2^T (\varepsilon_2 - C_{22}^{-1}\sigma_2 + C_{22}^{-1}C_{21}\varepsilon_1)) dV - f(\delta \mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \quad (1.80)$$

где

$$\delta \varepsilon_1 = \mathbf{L}_1 \delta \mathbf{u} \quad (1 \nrightarrow 2); \quad \varepsilon_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{u} \quad (1 \nrightarrow 2);$$

$$C_{11}^* = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}.$$

В более компактном виде смешанную вариационную постановку задачи статики (1.80) можно сформулировать следующим образом. Требуется найти такую пару вектор-функций  $\mathbf{u}$ ,  $\sigma_2$ , для которых оказываются, при любых  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \sigma_2$ , справедливыми вариационные уравнения

$$\left. \begin{aligned} a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\delta \mathbf{u}, \sigma_2) &= f(\delta \mathbf{u}); \\ b(\mathbf{u}, \delta \sigma_2) - c(\delta \sigma_2, \sigma_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

где

$$a(\delta u, u) = \iiint_V (L_1 \delta u)^T C_{11}^* L_1 u dV;$$

$$b(\delta u, \sigma_2) = \iiint_V ((L_2 \delta u)^T + (L_1 \delta u)^T C_{12} C_{22}^{-1}) \sigma_2 dV;$$

$$c(\delta \sigma_2, \sigma_2) = \iiint_V \delta \sigma_2^T C_{22}^{-1} \sigma_2 dV.$$

Система вариационных уравнений (1.81) сохраняет свойства симметрии и соответствует задаче о нахождении седловой точки для смешанного функционала

$$I(u, \sigma_2) = \frac{1}{2} a(u, u) + b(u, \sigma_2) - \frac{1}{2} c(\sigma_2, \sigma_2) - f(u).$$

Такую формулировку задачи иногда называют модифицированным принципом Рейсснера.

### 1.2.3. Независимые перемещения и деформации. Согласованность аппроксимаций

В ряде случаев бывает удобно воспользоваться вместо (1.71), (1.72) записью вариационной формулировки принципа Хеллингера — Рейсснера в деформациях и перемещениях. Воспользовавшись соотношениями упругости (1.11), получим

$$\iiint_V (L \delta u)^T C \varepsilon dV - f(\delta u) = 0; \quad (1.82)$$

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T C (Lu - \varepsilon) dV = 0. \quad (1.83)$$

Вариационное уравнение (1.82) приводит к уравнениям равновесия, записанным через деформации  $L^* C \varepsilon - g = 0$  в объеме  $V$  и  $L^* C \varepsilon - p = 0$  на поверхности  $S_p$ . Уравнение (1.83) требует выполнения условий совместности деформаций  $Lu = \varepsilon$ .

С использованием обозначений функционального анализа формулировка задачи (1.82), (1.83) записывается более кратко

$$b(\delta u, \varepsilon) = f(\delta u);$$

$$b(u, \delta \varepsilon) = c(\delta \varepsilon, \varepsilon),$$

где

$$b(\delta u, \varepsilon) = \iiint_V (L \delta u)^T C \varepsilon dV;$$

$$c(\delta \varepsilon, \varepsilon) = \iiint_V \delta \varepsilon^T C \varepsilon dV.$$

Эти уравнения соответствуют условиям седловой точки для смешанного функционала  $I(u, \varepsilon) = b(u, \varepsilon) - \frac{1}{2}c(\varepsilon, \varepsilon) - f(u)$ .

Единственность решения смешанных вариационных задач, рассмотренных выше, обеспечивается выполнением необходимых и достаточных условий непрерывности и условий Бабушки — Бреззи, которые обеспечивают выполнение обобщенной теоремы Лакса — Мильграма [29, 39].

Отметим некоторые преимущества смешанной вариационной формулировки задачи (1.82), (1.83) по сравнению с классическим методом перемещений. При решении задач прикладной теории упругости и строительной механики методом конечных элементов сходимость решений в ряде случаев определяется реакцией элемента на смещения как жесткого целого и геометрической изотропией (когда не отдается предпочтение какому-либо направлению) аппроксимации деформаций. Плохая сходимость решений, в первую очередь, характерна для криволинейных элементов оболочечного типа, поскольку аппроксимация перемещений полиномами низкой степени является грубой для описания смещений как жесткого целого. Такие элементы могут накапливать «ложную» деформацию и вносить существенные погрешности в решение задач. При учете деформаций поперечных сдвигов и обжатия в многослойных оболочечных элементах учет смещения как жесткого целого становится особенно важным, поскольку при уменьшении параметра тонкостенности  $(h/R)$  указанные деформации стремятся к нулю, а коэффициенты их вклада в общую потенциальную энергию стремятся к бесконечности. Таким образом, погрешности в вычислении деформаций усиливаются и могут дать значительную «ложную» энергию, превосходящую энергию изгиба или энергию мембранных деформаций. Независимая аппроксимация полей деформаций в пределах конечного элемента при использовании смешанного метода позволяет обеспечить минимальную энергию «ложных» деформаций и требуемый ранг матрицы жесткости.

При решении задач методом конечных элементов (в варианте независимых перемещений) аппроксимация поля перемещений конструируется в виде (1.27). В качестве функций формы, как правило, используют полиномы, обеспечивающие в пределах элемента геометрическую изотропию аппроксимации, а на границах элементов — необходимую гладкость сопряжения. В соответствии с (1.27) поле деформаций в конечном элементе при решении методом перемещений определяется как  $\varepsilon = Bq$ , где  $B = L\Phi$ , а соответствующая матрица жесткости элемента вычисляется согласно (1.30).

Пусть  $n_q$  — число обобщенных узловых степеней свободы в конечном элементе (равно размерности вектора  $q$  (1.27)), а  $n_r$  — размерность ядра оператора связи деформаций с перемещениями  $L$  (величина  $n_r$  равна числу независимых смещений элемен-

та как жесткого целого). Тогда для конечного элемента ранг матрицы  $K$  должен быть равен

$$\text{rank } K = n_q - n_r. \quad (1.84)$$

Если функции формы, входящие в матрицу  $\Phi$  (1.27), не содержат функций, описывающих точно смещения как жесткого целого, то условие (1.84) не будет выполняться. В таких элементах при смещении как жесткого целого будут возникать «ложные» деформации и сходимость МКЭ будет низкой.

При использовании вариационной формулировки задачи в смешанной форме (1.82), (1.83) появляется возможность коррекции ранга матрицы жесткости, и в ряде случаев удается добиться выполнения условия (1.84). Для этого в соответствии с размерностью аппроксимации перемещений (1.27) подбирают размерность независимой аппроксимации поля деформаций

$$\varepsilon = \omega \alpha \quad (1.85)$$

следующим образом:

$$n_\alpha = n_q - n_r, \quad (1.86)$$

где  $\omega$  — матрица функций форм аппроксимации деформаций;  $\alpha$  — вектор-столбец коэффициентов аппроксимации;  $n_\alpha$  — размерность вектор-столбца  $\alpha$ . Выполнение (1.86) при разумных аппроксимациях перемещений (1.27), деформаций (1.85) и подборе формы элемента обеспечивает необходимый ранг матрицы жесткости  $K$  (1.84). Согласно (1.82), (1.83) и (1.27), (1.85) для конечного элемента будем иметь

$$\left. \begin{aligned} G^T \alpha &= P; \\ Gq &= H\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G &= \iiint_V \omega^T C B dV; \quad H = \iiint_V \omega^T C \omega dV; \\ P &= \iiint_V \Phi^T g dV + \iint_{S_p} \Phi^T p dS; \quad B = L\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

Тогда, исключив из (1.87) коэффициенты  $\alpha$ , получим  $\alpha = H^{-1} Gq$ ;  $Kq = P$ , где

$$K = G^T H^{-1} G \quad (1.89)$$

есть матрица жесткости элемента, полученная при независимой аппроксимации полей перемещений (1.27) и деформаций (1.85). Поскольку в лучшем случае  $\text{rank } G = \min(n_q - n_r, n_\alpha)$  и  $\text{rank } H = n_\alpha$ , то при размерности  $n_\alpha$ , соответствующей (1.86), для матрицы  $K$  (1.89) будет выполняться условие (1.84).

Таким образом, независимые, но согласованные по размерностям аппроксимации деформаций (1.85) и перемещений (1.27) позволяют сохранить в интегральной форме размерность

ядра оператора  $\mathbf{L}$  и тем самым разрешить конечному элементу необходимое число смещений как жесткого целого. При этом следует помнить, что внутри элемента нарушаются условия совместности деформаций. Однако, если вне зависимости от характерного размера конечного элемента для выбранных аппроксимаций выполняются условия Бабушки—Бреззи [39], то сходимость решений теоретически обеспечивается.

При построении конечных элементов с независимой аппроксимацией деформаций в элементе необходимо обеспечить геометрическую изотропию полей перемещений и деформаций, а также выполнение условия согласованности размерностей (1.86). Наиболее опасно нарушение условия (1.86) при  $n_\alpha < n_q - n_r$ . В этом случае матрица жесткости будет содержать лишние нулевые собственные значения и конечный элемент превратится в механизм.

Относительно сравнительной оценки затрат машинного времени для вычисления матриц жесткости конечных элементов на основе метода перемещений (1.30) и смешанного метода (1.89) можно сказать следующее. На первый взгляд кажется, что для вычисления матрицы жесткости на основе смешанного метода требуется значительно больше операций, чем по методу перемещений, поскольку при использовании квадратурных формул численного интегрирования одинакового порядка для (1.30) число операций будет пропорционально  $n_q^2$ . Для (1.89) даже без учета обращения матрицы  $\mathbf{H}$  и перемножений число операций, затраченных при вычислении  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  (1.89), будет пропорционально  $n_q n_\alpha + n_\alpha^2$ , что, как правило, больше  $n_q^2$ . Однако блочная упорядоченность матрицы аппроксимации  $\omega$  при вычислении  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  позволяет затратить число операций всего лишь пропорционально  $n_q m + m^2$ , где  $m$  — число независимых базисных функций для аппроксимации деформаций ( $m^2 \ll n_q^2$ ). Поэтому вместо проигрыша по времени получаем выигрыш практически в  $n_q/m$  раз. С учетом блочной структуры  $\mathbf{H}$  операции обращения этой матрицы будут пропорциональны не  $n_\alpha^3$ , а  $m^3$ , что также требует незначительных затрат машинного времени.

Пример разработки конечного элемента на основе смешанной вариационной формулировки дается в разделах 3.5, 4.4, 5.5.

### 1.3. ВАРИАЦИОННО-МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

#### 1.3.1. Преобразования вариационных формулировок

При расчете на ЭВМ наиболее удобной формой представления разрешающих дифференциальных уравнений одномерных задач являются системы дифференциальных уравнений первого

порядка или канонические системы\*. Для таких систем разработаны стандартные программы интегрирования, а также различные вычислительные приемы, обеспечивающие достаточную точность решения краевых задач [7, 15, 21]. К одномерным можно отнести задачи деформирования стержней, балок, а также круглых пластин и оболочек вращения при осесимметричном нагружении. В ряде случаев для трехмерных и двумерных задач теории упругости можно применить метод разделения переменных и решать задачи в рядах Фурье или методом Канторовича. Такие задачи, для которых тем или иным способом можно приближенно перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным уравнениям (или к последовательности обыкновенных уравнений), также будем относить к одномерным. Иногда такие задачи называются квазиодномерными. Ниже рассматривается вариационно-матричный способ получения систем дифференциальных уравнений первого порядка и матриц жесткости для одномерных систем, основанный на смешанной вариационной формулировке [2, 26].

Кинематические компоненты в сечении одномерной системы будем характеризовать вектор-столбцом обобщенных перемещений  $X$ . С помощью компонент вектора  $X$  при стыковке отдельных элементов обеспечивается необходимая гладкость решения и формируются главные граничные условия. Например, в расчетах тонкостенных оболочек вращения под компонентами вектора обобщенных перемещений выступают перемещения и углы поворота нормали к базовой поверхности.

Распределения перемещений и деформаций по сечению устанавливаются согласно исходным гипотезам деформирования и, в общем случае,

$$u = F_1 X + F_2 Y; \quad (1.90)$$

$$\varepsilon = B_1 X + B_2 Y, \quad (1.91)$$

где  $Y$  будем называть вектором производных, его компонентами являются первые производные  $d/ds$  (условно примем  $s = x_1$ ) от компонент вектора обобщенных перемещений или их комбинации с перемещениями, необходимые для записи распределения перемещений и деформаций;  $F_1$ ,  $F_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  — матрицы, содержащие заданные функции (аргументов  $x_2$ ,  $x_3$ ), аппроксимирующие распределение перемещений и деформаций в сечении.

Характерной особенностью записи выражений (1.90), (1.91) является то, что аппроксимирующие матрицы не содержат в своих коэффициентах дифференциальных операторов  $d/ds$ , поскольку все необходимые первые производные содержатся в компонентах вектора  $Y$ . По этой же причине между векторами

---

\* В теории дифференциальных уравнений такие системы называют нормальными.

$\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  можно установить очевидную дифференциальную связь, которую в общем случае удобно представить следующим образом:

$$\mathbf{X}_{,s} - \mathbf{C}_1 \mathbf{X} - \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} = 0, \quad (1.92)$$

Это дифференциальное уравнение связи (1.92) будем учитывать как дополнительное условие при выводе разрешающих уравнений.

Воспользуемся принципом возможных перемещений и аналогично (1.5) запишем уравнение

$$\int_{s(1)}^{s(2)} \int_A (\delta \varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}) dA ds - \delta \mathbf{X}_{(1)}^T \mathbf{t}_{(1)} - \delta \mathbf{X}_{(2)}^T \mathbf{t}_{(2)} = 0, \quad (1.93)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения рассматриваемой одномерной системы;  $\mathbf{g}$  — вектор-столбец, компоненты которого содержат достаточно гладкие функции распределенных объемных нагрузок;  $dA = dx_2 dx_3$ ;  $s_{(1)}$  и  $s_{(2)}$  — начальная и конечная координаты  $s$  одномерной системы;  $\mathbf{t}_{(1)}$  и  $\mathbf{t}_{(2)}$  — внешние силовые факторы, приложенные к системе при  $s = s_{(1)}$  и  $s = s_{(2)}$ ;  $\delta \mathbf{X}_{(1)} = = \delta \mathbf{X}(s_{(1)})$  ( $1 \neq 2$ ).

В уравнении (1.93) под возможными перемещениями  $\delta \mathbf{u}$  и возможными деформациями  $\delta \varepsilon$  будем понимать их представление, аналогичное (1.90), (1.91), т. е.

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{X} + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{Y}; \quad (1.94)$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B}_1 \delta \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \delta \mathbf{Y}. \quad (1.95)$$

Между возможными обобщенными перемещениями  $\delta \mathbf{X}$  и их производными  $\delta \mathbf{Y}$  также установим дифференциальную связь, аналогичную (1.92):

$$\delta \mathbf{X}_{,s} - \mathbf{C}_1 \delta \mathbf{X} - \mathbf{C}_2 \delta \mathbf{Y} = 0. \quad (1.96)$$

Для линейно-упругого тела напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  в (1.93) определим согласно закону Гука, который запишем с учетом представления деформаций (1.91)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{B}_1 \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}). \quad (1.97)$$

Для того чтобы в уравнении (1.93) считать независимыми переменными как обобщенные перемещения  $\mathbf{X}$ , так и их производные  $\mathbf{Y}$ , дополним (1.93) с помощью множителей Лагранжа  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  и  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  условиями связи (1.92) и (1.96). Тогда с учетом (1.97) получим следующую вариационную формулировку задачи:

$$\begin{aligned} & \int_{s(1)}^{s(2)} (\delta \mathbf{X}^T (\mathbf{S}_{11} \mathbf{X} + \mathbf{S}_{12} \mathbf{Y} - \mathbf{C}_1^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N}_1) + \delta \mathbf{X}_{,s}^T \boldsymbol{\lambda} + \\ & + \delta \mathbf{Y}^T (\mathbf{S}_{21} \mathbf{X} + \mathbf{S}_{22} \mathbf{Y} - \mathbf{C}_2^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{N}_2) + \\ & + \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{X}_{,s} - \mathbf{C}_1 \mathbf{X} - \mathbf{C}_2 \mathbf{Y})) ds - \delta \mathbf{X}_{(1)}^T \mathbf{t}_{(1)} - \delta \mathbf{X}_{(2)}^T \mathbf{t}_{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.98)$$



где

$$S_{ij} = \int_A B_i^T C B_j dA, \quad (i, j = 1, 2); \quad (1.99)$$

$$N_i = \int_A F_i^T g dA, \quad (i = 1, 2). \quad (1.100)$$

Приравняв нулю сомножитель при  $\delta Y$  в подынтегральном выражении (1.98), определим вектор-столбец производных  $Y$  через вектор-столбец обобщенных перемещений и вектор-столбец множителей Лагранжа:

$$Y = S_{22}^{-1} (N_2 + C_2^T \lambda - S_{21} X). \quad (1.101)$$

Далее с помощью (1.101) исключим вектор-столбец производных  $Y$  из вариационной формулировки (1.98), в результате получим новую смешанную постановку задачи:

$$\int_{s(1)}^{s(2)} (-\delta \lambda^T (A_{11} X + A_{12} \lambda + H_1 - X_{,s}) + \delta X_{,s}^T \lambda + \delta X^T (A_{21} X + A_{22} \lambda + H_2)) ds - \delta X_{(1)}^T t_{(1)} - \delta X_{(2)}^T t_{(2)} = 0, \quad (1.102)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= C_1 - b S_{21}; & A_{12} &= b C_2^T; \\ A_{21} &= S_{11} - d S_{21}; & A_{22} &= -A_{11}^T; \\ H_1 &= b N_2; & H_2 &= -N_1 + d N_2; \\ b &= C_2 S_{22}^{-1}; & d &= S_{21}^T S_{22}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.103)$$

С учетом того обстоятельства, что для матриц  $S_{ij}$  (1.99)  $S_{ij} = S_{ji}^T$ , легко показать, что матрицы  $A_{ij}$  обладают следующими свойствами:

$$A_{12} = A_{12}^T; \quad A_{21} = A_{21}^T; \quad A_{22} = -A_{11}^T. \quad (1.104)$$

В терминах функционального анализа вариационная формулировка задачи (1.102) будет определяться следующим образом: требуется найти такую пару  $X$  и  $\lambda$  (из соответствующих допустимых множеств), для которых при любых возможных  $\delta X$ ,  $\delta \lambda$  оказываются справедливыми уравнения

$$\begin{aligned} a(\delta X, X) + b(\delta X, \lambda) &= f_1(\delta X); \\ b(X, \delta \lambda) - c(\delta \lambda, \lambda) &= f_2(\delta \lambda), \end{aligned} \quad (1.105)$$

где

$$a(\delta X, X) = \int_{s(1)}^{s(2)} \delta X^T A_{21} X ds;$$

$$b(\delta X, \lambda) = \int_{s(1)}^{s(2)} (\delta X^T A_{22} \lambda + \delta X_{,s}^T \lambda) ds;$$

$$b(X, \delta \lambda) = \int_{s(1)}^{s(2)} (-\delta \lambda^T A_{11} X + \delta \lambda^T X_{,s}) ds;$$

$$c(\delta \lambda, \lambda) = \int_{s(1)}^{s(2)} \delta \lambda^T A_{12} \lambda ds;$$

$$f_1(\delta X) = \int_{s(1)}^{s(2)} \delta X^T H_2 ds - \delta X_{(1)}^T t_{(1)} - \delta X_{(2)}^T t_{(2)};$$

$$f_2(\delta \lambda) = \int_{s(1)}^{s(2)} \delta \lambda^T H_1 ds.$$

Формулировка задачи (1.105) соответствует задаче о нахождении седловой точки смешанного функционала

$$J(X, \lambda) = \frac{1}{2} a(X, X) + b(X, \lambda) - \frac{1}{2} c(\lambda, \lambda) - f_1(X) - f_2(\lambda).$$

В практике решения задач вариационная формулировка (1.102) /или (1.105)/ используется редко. Эффективно применяют другую формулировку задачи, аналогичную той, которая используется в прямом методе граничных элементов [6]. Для этого в (1.102) проинтегрируем по частям слагаемое  $\delta X_{,s}^T \lambda$ , после чего получим

$$\int_{s(1)}^{s(2)} (-\delta \lambda^T (A_{11} X + A_{12} \lambda + H_1 - X_{,s}) + \delta X^T (A_{21} X + A_{22} \lambda + H_2 - \lambda_{,s})) ds - \delta X_{(1)}^T (t_{(1)} + \lambda_{(1)}) - \delta X_{(2)}^T (t_{(2)} - \lambda_{(2)}) = 0. \quad (1.106)$$

Для произвольных  $\delta \lambda$  и  $\delta X$  потребуем, чтобы на интервале  $(s(1), s(2))$  обобщенные перемещения  $X$  и обобщенные силовые факторы  $\lambda$  /физический смысл множителей Лагранжа следует

из (1.106)/ удовлетворяли уравнению

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.107)$$

Тогда вариационная формулировка задачи (1.106) станет

$$\delta \mathbf{X}_{(1)}^T (-\lambda_{(1)} - \mathbf{t}_{(1)}) + \delta \mathbf{X}_{(2)}^T (\lambda_{(2)} - \mathbf{t}_{(2)}) = 0, \quad (1.108)$$

где  $\lambda_{(i)} = \lambda(s_{(i)})$  ( $i=1,2$ ). Поскольку  $\lambda_{(1)} = \lambda(s_{(1)})$  и  $\lambda_{(2)} = \lambda(s_{(2)})$  представляют значения обобщенных силовых факторов  $\lambda$ , удовлетворяющих решению (1.107), то их можно определить из общего решения (1.107), записанного для  $s=s_{(2)}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(2)} \\ \lambda_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{(1)} \\ \lambda_{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (1.109)$$

где  $\omega_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) — являются блоками матрицы фундаментальных решений, вычисленными при  $s=s_{(2)}$ ;  $\dot{\mathbf{X}}, \dot{\lambda}$  — определяются частным решением системы (1.107), вычисленным при  $s=s_{(2)}$ .

Воспользовавшись связью (1.109), вариационную формулировку (1.108) можно представить в классическом виде метода перемещений

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{Kq} - \mathbf{P} - \mathbf{t}) = 0, \quad (1.110)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q} &= [\delta \mathbf{X}_{(1)}^T, \delta \mathbf{X}_{(2)}^T]^T; \quad \mathbf{q} = [\mathbf{X}_{(1)}^T, \mathbf{X}_{(2)}^T]^T; \\ \mathbf{P} &= [\mathbf{P}_{(1)}^T, \mathbf{P}_{(2)}^T]^T; \quad \mathbf{t} = [\mathbf{t}_{(1)}^T, \mathbf{t}_{(2)}^T]^T; \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Матричные блоки  $\mathbf{K}_{ij}$  вычисляются через блоки матрицы фундаментальных решений  $\omega_{ij}$  (1.109) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{12} &= -\omega_{12}^{-1}; \quad \mathbf{K}_{11} = \omega_{12}^{-1} \omega_{11}; \\ \mathbf{K}_{21} &= \mathbf{K}_{12}^T; \quad \mathbf{K}_{22} = \omega_{22} \omega_{12}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.112)$$

а приведенные узловые силы  $\mathbf{P}_{(i)}$  определяются через частное решение

$$\mathbf{P}_{(1)} = -\omega_{12}^{-1} \dot{\mathbf{X}}; \quad \mathbf{P} = -\dot{\lambda} - \omega_{22} \mathbf{P}_{(1)}. \quad (1.113)$$

Если под действующими внешними торцевыми силами  $\mathbf{t}_{(1)}, \mathbf{t}_{(2)}$  понимать реакции отброшенных частей одномерной системы, то (1.110) позволяет получить связь реакций одномерного конечного элемента с его торцевыми перемещениями:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Kq} - \mathbf{P}. \quad (1.114)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  является матрицей жесткости одномерного элемента, построенного с использованием фундаментальных решений

одномерной системы согласно зависимостям (1.112). Далее краевая задача решается с использованием (1.114) путем стандартных операций метода конечных элементов (приложение 3).

### 1.3.2. Алгоритм получения канонических систем и матриц жесткости

В предыдущем разделе было показано, как, используя последовательные преобразования смешанных вариационных постановок задачи, удастся формализовать процедуры получения канонических систем дифференциальных уравнений и матриц жесткости для одномерных систем общего вида. Алгоритм вариационно-матричного способа получения канонических систем и матриц жесткости будет следующим.

**1-й этап. Подготовка исходной информации.** В качестве исходной информации необходимо предоставить:  $F_1, F_2$  — матрицы, определяющие распределение по сечению перемещений (1.84);  $B_1, B_2$  — матрицы, определяющие распределение по сечению деформаций (1.95);  $C$  — матрицу соотношений упругости (1.97);  $C_1, C_2$  — матрицы связи обобщенных перемещений и их производных (1.92);  $g$  — вектор внешних распределенных нагрузок;  $s_{(1)}, s_{(2)}$  — начальную и конечную координаты одномерной системы.

**2-й этап. Переход к одномерной задаче.** Последовательно выполнить вычисления и определить:  $S_{ij}$  — матрицы приведенных жесткостей (1.99);  $N_i$  — вектор-столбец приведенных погонных внешних сил (1.100).

**3-й этап. Получение канонической системы разрешающих дифференциальных уравнений.** Выполнить матричные операции (1.103) и определить матричные блоки  $A_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) и вектор-столбцы свободных членов  $H_i$  ( $i=1,2$ ) канонической системы дифференциальных уравнений (1.107).

**4-й этап. Интегрирование канонической системы.** Путем интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.107) вычислить матричные блоки  $\omega_{ij}$  матрицы фундаментальных решений и вектор-столбец  $[\dot{X}^T, \dot{\lambda}^T]^T$  частного решения при  $s=s_{(2)}$  (1.109). Эти вычисления можно выполнять с использованием стандартных процедур численного интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка.

**5-й этап. Получение матрицы жесткости и вектора приведенных нагрузок.** Выполнить матричные операции (1.12) и определить  $K_{ij}$  — блоки матрицы жесткости одномерного элемента (1.112) и  $P_{(i)}$  — приведенные узловые силы (1.113). Матрица жесткости  $K$  и вектор приведенных нагрузок формируются согласно (1.111).

Представленная последовательность вычислений определяет алгоритм получения канонических систем и матриц жесткости. Этот алгоритм является общим для широкого класса одномерных систем и легко поддается программированию (при-

ложение 4). Его весьма эффективно можно использовать при расчете многослойных оболочек вращения со сложными моделями деформирования.

### 1.3.3. Свойства симметрии

Кроме полученных свойств симметрии\* (1.104) матричных блоков разрешающей системы дифференциальных уравнений (1.107) определенный интерес представляют свойства матрицы фундаментальных решений (1.109) и матрицы жесткости  $K$  (1.111).

Предположим, что для вариационной формулировки задачи (1.106) при  $t_{(1)} = t_{(2)} = 0$  возможные обобщенные перемещения  $\delta X$  и силовые факторы  $\delta \lambda$  удовлетворяют решению дифференциального уравнения

$$\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta \lambda \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \end{bmatrix}. \quad (1.115)$$

Тогда после интегрирования (1.106) по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_{s(1)}^{s(2)} (\delta X^T H_2 - \delta \lambda^T H_1) ds + [\delta \lambda^T X]_{s(1)}^{s(2)} = \\ & = \int_{s(1)}^{s(2)} (X^T \delta H_2 - \lambda^T \delta H_1) ds + [\lambda^T \delta X]_{s(1)}^{s(2)}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Этот результат известен как теорема взаимности работ (теорема Бетти) и означает, что работа сил реального состояния на перемещениях другого допустимого состояния (параметры допустимого состояния отмечены символом  $\delta$ ) равна работе сил допустимого состояния на перемещениях реального состояния. При  $H_i = \delta H_i = 0$  из (1.116) следует

$$[\delta \lambda^T X]_{s(1)}^{s(2)} = [\lambda^T \delta X]_{s(1)}^{s(2)}. \quad (1.117)$$

Уравнение (1.117) с учетом связи вектора состояния  $[X_{(2)}^T, \lambda_{(2)}^T]^T$  в сечении  $s = s_{(2)}$  с вектором состояния  $[X_{(1)}^T, \lambda_{(1)}^T]^T$  в сечении  $s = s_{(1)}$  (1.109) позволяет доказать следующие свойства блоков матрицы фундаментальных решений:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11}^T \omega_{22} - \omega_{21}^T \omega_{12} &= E_{(n \times n)}; \\ \omega_{11}^T \omega_{21} &= \omega_{21}^T \omega_{11}; \\ \omega_{12}^T \omega_{22} &= \omega_{22}^T \omega_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

где  $E_{(n \times n)}$  — единичная матрица размерности  $(n \times n)$ ;  $2n$  — порядок канонической системы. Кроме того, на основании

\* Другое доказательство этих свойств с помощью теоремы о взаимности работ можно найти в [7].

(1.118) или условий симметрии матричных блоков канонической системы (1.104) можно показать, что определитель матрицы фундаментальных решений для любого участка интегрирования должен быть равен

$$\det(\omega) = \det \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} = 1. \quad (1.119)$$

Условие (1.119) можно использовать как необходимое, но, к сожалению, не как достаточное для контроля за точностью численного интегрирования, т. е. если решение верно, то равенство (1.119) выполняется, если (1.119) не выполняется, то решение заведомо неверно.

### 1.3.4. Особенности численной реализации

Заполнение матрицы фундаментальных решений  $\omega$  можно представить так. На участке  $(s_{(1)}, s_{(2)})$  одномерной системы решается задача Коши при  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = 0$  (1.107) при начальных условиях, когда только  $j$ -я компонента вектора состояния в первом сечении  $[\mathbf{X}_{(1)}^T, \lambda_{(1)}^T]^T$  равна единице, остальные компоненты — нули. В результате интегрирования (1.107) в сечении  $s = s_{(2)}$  получим определенный вектор состояния. Этот вектор заносится как  $j$ -й столбец в матрицу  $\omega$ . Получив решения всех  $2l$  задач с единичными условиями, полностью заполним матрицу фундаментальных решений\*. Вектор частного решения получается после интегрирования неоднородного уравнения (1.107) при нулевых начальных условиях.

При численной реализации процедур заполнения матрицы фундаментальных решений в ряде случаев (например, для моментных оболочечных элементов или балочных на упругом основании) участки выбирают достаточно короткими, если не применяют приемы ортогонализации [7, 15, 21]. Это связано со спецификой разрешающей системы дифференциальных уравнений, для которой возможны быстро возрастающие и быстро затухающие решения, а также с неизбежными погрешностями округления при вычислениях на ЭВМ. При большом участке интегрирования, если не применяются специальные приемы, векторы решений в  $\omega$  при расчете на ЭВМ могут стать практически линейно зависимыми или будут вычисляться недостаточно точно. По этой причине метод начальных параметров, который часто используется при расчете стержней, для моментных оболочек применяется редко. Длину участка интегрирования необходимо выбирать, ориентируясь на собственные значения матрицы разрешающей системы  $\mathbf{A}$ .

Приведенные выше матричные соотношения для определения коэффициентов канонических систем позволяют не получать явных аналитических зависимостей, а вычислять значения коэффициентов для конкретного сечения с координатой  $s$ . Для сокращения вычислительных операций, выполняемых ЭВМ на каждом шаге численного интегрирования в случае переменных коэффициентов можно воспользоваться приемом аппроксимации. Для этого одномерный объект по координате  $s$  разобьем на участки длиной  $\Delta$ . Матрицы разрешающей системы будем вычислять только в узлах разбивки. Для участка интерполяции  $s_{(1)}, s_{(2)}$  воспользуемся информацией в точках  $s = s_{(1)} - \Delta, s_{(1)}, s = s_{(2)}, s = s_{(2)} + \Delta$ . Значения матриц в этих точках обозначим соответственно  $A_{1-\Delta}, A_1, A_2, A_{2+\Delta}$ . Для гладкого сопряжения аппроксима-

\* Другой прием построения матрицы фундаментальных решений с помощью матричных рядов можно найти в [13]. Для расчета оболочек вращения этот прием совместно со стыковой элементов впервые использовался в работе [12].

ций  $A$  воспользуемся интерполяцией по четырем точкам. Интерполиант представим в виде кубического полинома. Для  $s_{(1)} \leq s \leq s_{(2)}$

$$A(s) \approx I(s) = b_1 + b_2(s - s_{(1)}) + b_3(s - s_{(1)})(s - s_{(2)}) + b_4(s - s_{(1)})^2(s - s_{(2)}). \quad (1.120)$$

Для определения коэффициентов матриц интерполяции  $b_i$  ( $i=1 \dots 4$ ) будем считать, что аппроксимирующая матрица совпадает с матрицей разрешающей системы на краях участка интерполяции, т. е. при  $s=s_{(1)}$  и  $s=s_{(2)}$

$$I(s_{(1)}) = A_1; \quad I(s_{(2)}) = A_2. \quad (1.121)$$

Кроме того, выполним следующие сопряжения участков аппроксимации по первым производным:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(s_{(1)}) &= \frac{1}{2\Delta} (A_2 - A_{1-\Delta}); \\ \frac{d}{ds} I(s_{(2)}) &= \frac{1}{2\Delta} (A_{2+\Delta} - A_1). \end{aligned} \quad (1.122)$$

После подстановки в (1.121) и (1.122) выражений для  $I(s)$  (1.120) получим систему матричных уравнений, решение которой определит матрицы интерполяции.

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= A_1; \quad b_2 = \frac{1}{\Delta} (A_2 - A_1); \\ b_3 &= \frac{1}{2\Delta^2} (A_2 - 2A_1 + A_{1-\Delta}); \\ b_4 &= \frac{1}{2\Delta^3} (A_{2+\Delta} - 3A_2 + 3A_1 - A_{1-\Delta}). \end{aligned} \right\} \quad (1.123)$$

Для решения задач статики аналогичным образом может быть аппроксимирована изменяющаяся вдоль координаты  $s$  внешняя распределенная нагрузка или вектор свободных членов в разрешающей системе.

Относительно матрицы жесткости элемента  $K$  (1.111), (1.112) можно сказать следующее. Полученная с помощью интегрирования канонической системы (1.107) матрица жесткости одномерного элемента не связана с аппроксимациями по координате  $s$  полей перемещений, деформаций или напряжений и является точной в отличие от матриц жесткости, полученных в предыдущих разделах. В этом случае можно утверждать, что внутри элемента уравнения равновесия и совместности деформаций выполняются строго\* и соответствующие поля перемещений элемента содержат необходимые перемещения как жесткого целого. С использованием свойств матрицы фундаментальных решений (1.118) можно показать, что матричные блоки  $K_{ij}$ , полученные согласно (1.112), обладают следующими свойствами:  $K_{11} = K_{11}^T$ ;  $K_{21} = K_{12}^T$ ;  $K_{22} = K_{22}^T$ , т. е. матрица жесткости  $K$  является симметричной.

Определенный интерес при решении задач о деформировании многослойных одномерных систем представляет случай, когда в сечениях системы (например, при  $s=s_{(1)}$  и/или при  $s=s_{(2)}$ ) ставятся дополнительные кинематические связи. Эти связи могут возникнуть при стыковке различных моделей деформирования многослойных оболочек, в местах установки жестких диафрагм или кольцевых подкреплений. Вариационная формулировка задачи (1.110), в которой участвуют граничные обобщенные перемещения, позво-

\* Здесь речь идет о точности аналитического решения в пределах принятых допущений по исходной модели деформирования. При численной реализации на ЭВМ погрешности безусловно будут присутствовать.

ляет выполнить силовые условия сопряжения и осуществить преобразования матриц жесткости и приведенных узловых сил.

Пусть дополнительные кинематические связи на узловые обобщенные перемещения задаются в виде

$$\delta q = T^* \delta q^*, \quad q = T^* q^*, \quad (1.124)$$

где  $\delta q^*$  — допустимые обобщенные перемещения на границах одномерного элемента с учетом связей. Тогда вместо вариационной формулировки задачи (1.110) получим

$$\delta q^* T^* T^T (K T^* q - p) - \delta q^* t^* = 0, \quad (1.125)$$

где  $t^*$  — вектор-столбец торцевых внешних сил, действующих на систему со связями. Условие (1.125) позволяет записать уравнение равновесия

$$t^* = K^* q^* - P^*, \quad (1.126)$$

где

$$K^* = T^* T^T K T^*;$$

$$q^* = T^* q; \quad P^* = T^* P.$$

Матрица  $K^*$  представляет матрицу жесткости элемента с дополнительными связями, а вектор-столбец  $P^*$  содержит компоненты приведенных к узловым сечениям внешних распределенных сил.

## 1.4. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

### 1.4.1. Линеаризованная формулировка принципа возможных перемещений для нелинейных систем

Получим формулировку задачи о равновесии физически нелинейной системы в случае больших перемещений. Процесс статического нагружения мысленно свяжем с некоторым условным временем  $\tau$  (или параметром нагружения).

Пусть в начальный момент времени ( $\tau=0$ ) рассматриваемый объект имел исходную недеформированную конфигурацию. Проследим за изменением этой конфигурации в процессе нагружения. Будем считать, что для момента времени  $\tau$  нам известно равновесное напряженно-деформированное состояние системы, а на интервале времени  $(\tau, \tau+\Delta\tau)$  известны значения приращений внешних нагрузок. Истинные приращения перемещений, которые требуется определить, обозначим  $\Delta u$ . Поскольку задача нелинейная, то перемещения  $\Delta u$  определяются не за один шаг, а требуют для их вычисления итерационного процесса. Такой итерационный процесс можно организовать с использованием линеаризации формулировки принципа возможных перемещений, записанного для равновесного положения тела в момент времени  $\tau+\Delta\tau$ .

Будем считать, что  $m$ -я итерация должна приводить к положению равновесия. В этом случае должно выполняться условие

$$\iiint_V \delta \Delta e_{(m)}^T \sigma_{(m)} dV - f_{\tau+\Delta\tau} = 0, \quad (1.127)$$



где

$$f_{\tau+\Delta\tau} = \iiint_V \delta \Delta u_{(m)}^T \mathbf{g}_{\tau+\Delta\tau} dV + \iint_{S_p} \delta \Delta u_{(m)}^T \mathbf{p}_{\tau+\Delta\tau} dS \quad (1.128)$$

— представляет работу внешних сил;  $\delta \Delta \mathbf{e}_{(m)}$  — возможные приращения деформаций;  $\sigma_{(m)}$  — напряжения;  $\delta \Delta \mathbf{u}_{(m)}$  — возможные приращения перемещений;  $\mathbf{g}_{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\mathbf{p}_{\tau+\Delta\tau}$  — распределенные объемные и поверхностные силы, соответствующие моменту времени  $\tau+\Delta\tau$ . Индекс  $m$  указывает на принадлежность к  $m$ -й итерации; индексы  $\tau$  и  $\tau+\Delta\tau$  — к конфигурациям, соответствующим моментам времени  $\tau$  и  $\tau+\Delta\tau$ .

Суммарные напряжения на  $m$ -й итерации представим следующим образом:

$$\sigma_{(m)} = \sigma_{\tau} + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta \sigma_{(k)} + \Delta \sigma_{(m)} = \sigma_{(m-1)} + \Delta \sigma_{(m)}, \quad (1.129)$$

а в деформациях  $\Delta \mathbf{e}_{(m)}$  выделим линейные  $\Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)}$  и нелинейные  $\Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}$  слагаемые

$$\Delta \mathbf{e}_{(m)} = \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)} + \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}. \quad (1.130)$$

Приращение сил  $\Delta \mathbf{g}$  и  $\Delta \mathbf{p}$  на интервале  $(\tau, \tau+\Delta\tau)$  будем давать достаточно малым, чтобы считать связь приращений напряжений с приращениями деформаций линейной, т. е.

$$\Delta \sigma_{(m)} = \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{e}_{(m)}, \quad (1.131)$$

где  $\mathbf{C}_{\tau}$  — матрица касательных модулей, определенная для конфигурации  $\tau$ .

Запишем формулировку принципа возможных перемещений (1.127) с учетом (1.129) — (1.131)

$$\iiint_V (\delta (\Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)} + \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)})^T (\sigma_{(m-1)} + \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{e}_{(m)}) dV - f_{\tau+\Delta\tau} = 0. \quad (1.132)$$

Для того чтобы сохранить в (1.132) слагаемые только первого и второго порядков малости, примем

$$\delta \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}^T \sigma_{(m-1)} \approx \delta \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}^T \sigma_{\tau};$$

$$\delta \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)}^T \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{e}_{(m)} \approx \delta \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)}^T \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)};$$

$$\delta \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}^T \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{e}_{(m)} \approx 0.$$

Тогда получим следующую линеаризованную формулировку принципа возможных перемещений:

$$\iiint_V (\delta \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)}^T \mathbf{C}_{\tau} \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)} + \delta \Delta \boldsymbol{\eta}_{(m)}^T \sigma_{\tau} + \delta \Delta \mathbf{\varepsilon}_{(m)}^T \sigma_{(m-1)}) dV - f_{\tau+\Delta\tau} = 0. \quad (1.133)$$

Формулировка условия равновесия, записанная в виде (1.133), позволяет получить разрешающие уравнения для определения перемещений  $\Delta \mathbf{u}_{(m)}$  и выполнить итерацию  $\mathbf{u}_{(m)} = \mathbf{u}_{m-1} + \Delta \mathbf{u}_{(m)}$ .

Наиболее удобным при решении нелинейных задач [38] оказываются два варианта интегрирования (1.133). В первом варианте интегрирование проводится по исходному недеформированному объему, т. е. для конфигурации  $\tau = 0$ ; во втором — для конфигурации предыдущего равновесного состояния, соответствующего моменту времени  $\tau$ . При этом в декартовой системе координат для вычисления линейных составляющих приращений деформаций при интегрировании по исходному объему надо воспользоваться для компонент вектора  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , упорядоченных аналогично (1.2), следующими зависимостями:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,j}^{\tau} \Delta u_{k,i} + u_{k,i}^{\tau} \Delta u_{k,j}), \quad (1.134)$$

где  $i, j, k$  пробегает значения 1, 2, 3 (индекс итерации  $(m)$  опущен, по  $k$  идет суммирование). Во втором варианте, поскольку конфигурация  $\tau$  включает перемещения  $\mathbf{u}_{\tau}$ , для вычисления компонент  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  следует воспользоваться зависимостями

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.135)$$

Нелинейные составляющие приращений деформаций  $\Delta \boldsymbol{\eta}$  определяются для первого и второго вариантов следующим образом:

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1.136)$$

а их вариации

$$\delta \Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} \delta \Delta u_{k,j}). \quad (1.137)$$

Компоненты вектор-столбца возможных деформаций  $\delta \Delta \boldsymbol{\eta}$  упорядочены следующим образом:

$$\delta \Delta \boldsymbol{\eta} = [\delta \Delta \eta_1, \delta \Delta \eta_2, \delta \Delta \eta_3, \delta \Delta \chi_{12}, \delta \Delta \chi_{23}, \delta \Delta \chi_{31}]^T, \quad (1.138)$$

где

$$\delta \Delta \eta_i = \delta \Delta \eta_{ii} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\delta \Delta \chi_{ij} = \delta \Delta \eta_{ij} + \delta \Delta \eta_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

Относительно физических соотношений (1.131), связывающих приращения напряжений и деформаций, будем считать, что матрица касательных модулей  $\mathbf{C}_{\tau}$ , вычисленная для равновесной конфигурации  $\tau$ , сохраняет неизменными свои компоненты при итерациях в пределах этапа нагружения. Кроме того, будем считать деформации достаточно малыми, чтобы в соотношениях (1.131) не делать различия в матрицах  $\mathbf{C}_{\tau}$  для двух указанных выше вариантов интегрирования.

Такой метод решения нелинейных задач называется шаговым методом Ньютона с промежуточной итерационной коррекцией модифицированным методом Ньютона. Жесткость системы пересчитывается перед переходом к новой порции нагружения. В пределах итерационного процесса для нагрузки, соответствующей моменту  $\tau + \Delta\tau$ , жесткость системы остается постоянной и соответствует характеристикам  $C_\tau$ .

Рассмотрим частные случаи, которые можно получить из линеаризованной формулировки принципа возможных перемещений (1.133).

При решении геометрически линейных, но физически нелинейных задач из вариационной формулировки (1.133) получим

$$\iiint_V (\delta \Delta \varepsilon_{(m)}^T C_\tau \Delta \varepsilon_{(m)} + \delta \Delta \varepsilon_{(m)}^T \sigma_{(m-1)}) dV - f_{\tau+\Delta\tau} = 0, \quad (1.139)$$

где компоненты вектор-столбца  $\Delta \varepsilon_{(m)}$  определяются линейными соотношениями (1.135).

При решении линейных задач в (1.139) следует принять  $\sigma_{(m-1)} = 0$ ;

$$\Delta \varepsilon_{(m)} = \varepsilon = e; \quad C_\tau = C; \quad \Delta u_{(m)} = u; \quad g_{\tau+\Delta\tau} = g; \quad p_{\tau+\Delta\tau} = p;$$

после чего (1.139) будет соответствовать записи формулировки принципа возможных перемещений (1.5).

Уравнение в вариациях (1.133) позволяет формально записать условие смежного равновесного состояния системы. Если считать, что  $(m-1)$ -я итерация соответствует равновесному состоянию для момента нагружения  $\tau$ , и процесс дальнейшего деформирования происходит без приращения нагрузки, то, очевидно, следует потребовать

$$\iiint_V \delta \Delta \varepsilon_{(m)}^T \sigma_{(m-1)} dV - \iiint_V \delta \Delta u_{(m)}^T g_\tau dV - \iint_{S_p} \delta \Delta u_{(m)}^T p_\tau dS = 0.$$

Тогда условие смежного равновесного состояния примет вид

$$\iiint_V (\delta \Delta \varepsilon^T C_\tau \Delta \varepsilon + \delta \Delta \eta^T \sigma_\tau) dV = 0. \quad (1.140)$$

В случае, если состояние системы для момента времени  $\tau$  считается напряженным, но недеформированным, то вместо  $\Delta \varepsilon$  и  $\Delta \eta$  можно пользоваться обычными линейными и квадратичными представлениями  $\varepsilon$  и  $\eta$ , и для линейно-упругого тела вариационная формулировка задачи устойчивости (1.140) может быть представлена так:

$$\iiint_V (\delta \varepsilon^T C \varepsilon + \delta \eta^T \sigma_\tau) dV = 0, \quad (1.141)$$

где компоненты вектор-столбца вариаций нелинейных составля-

ющих деформаций  $\delta\eta$ , упорядоченные аналогично (1.138), имеют следующий вид:

$$\delta\eta_i = \delta\eta_{ii} \quad (i=1, 2, 3);$$

$$\delta\chi_{ij} = \delta\eta_{ij} + \delta\eta_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3, i \neq j)$$

$$\delta\eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \delta u_{k,j}).$$

Формулировка задачи устойчивости в виде (1.141) известна как энергетический критерий устойчивости в форме Брайана [1].

### 1.4.2. Вариант метода перемещений

Рассмотрим постановку задачи о вычислении поправки  $\Delta u_{(m)}$  на основе формулировки принципа возможных перемещений (1.133). Все компоненты деформаций и напряжений будем относить к исходному недеформированному базису. В этом случае деформации будут определяться компонентами тензора деформаций Лагранжа, а напряжения — компонентами тензора напряжений Пиола—Кирхгофа 2-го рода [38]. Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в уравнении (1.133).

Для первого слагаемого в подынтегральном выражении (1.133) воспользуемся соотношениями упругости в приращениях (1.131) и связью линейных составляющих деформаций с перемещениями (1.134)

$$\Delta \epsilon = \mathcal{L}_\tau \Delta u. \quad (1.142)$$

где элементы матрицы дифференциальных операторов  $\mathcal{L}_\tau$  определяются согласно формулам (1.134). (Здесь и в дальнейшем индекс итерации  $(m)$  опущен). Тогда первому слагаемому придадим вид

$$\delta \Delta \epsilon^T C_\tau \Delta \epsilon = (\mathcal{L}_\tau \delta \Delta u)^T C_\tau \mathcal{L}_\tau \Delta u. \quad (1.143)$$

Второе слагаемое в (1.133) также можно преобразовать к симметричному виду. Воспользовавшись для вариаций нелинейных составляющих деформаций (1.138) их представлением через перемещения (1.137), получим

$$\delta \Delta \eta^T \sigma_\tau = (\mathbf{I} \delta \Delta u)^T \Sigma_\tau \mathbf{I} \Delta u, \quad (1.144)$$

где

$$\mathbf{I} = [\nabla, \nabla, \nabla];$$

$9 \times 3$

$$[\sigma_\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_1^\tau & \sigma_{12}^\tau & \sigma_{13}^\tau \\ & \sigma_2^\tau & \sigma_{23}^\tau \\ \text{сим.} & & \sigma_3^\tau \end{bmatrix};$$

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T$$

$$\Sigma_\tau = [[\sigma_\tau], [\sigma_\tau], [\sigma_\tau]].$$

Третье слагаемое в подынтегральном выражении запишем с учетом линейной связи деформаций  $\delta \Delta \epsilon$  с перемещениями  $\delta \Delta u$ , аналогичной (1.142),

$$\delta \Delta \epsilon^T_{(m-1)} = (\mathcal{L}_\tau \delta \Delta u)^T G_{(m-1)}. \quad (1.145)$$

Представленные в виде (1.143) — (1.145) подынтегральные слагаемые позволяют привести формулировку задачи (1.133) к следующей: требуется определить такие  $\Delta u$ , для которых выполняется уравнение

$$\begin{aligned} & \iiint_V ((\mathcal{L}_\tau \delta \Delta u)^T C_\tau \mathcal{L}_\tau \Delta u + (I \delta \Delta u)^T \Sigma_\tau I \Delta u) dV = \\ & = \iiint_V \delta \Delta u^T g_{\tau+\Delta \tau} dV + \iint_{S_p} \delta \Delta u^T p_{\tau+\Delta \tau} dS - \iiint_V (\mathcal{L}_\tau \delta \Delta u)^T \sigma_{(m-1)} dV \end{aligned} \quad (1.146)$$

для любых возможных перемещений  $\delta \Delta u$ .

Рассмотрим реализацию решения линейаризованной задачи с помощью МКЭ в варианте метода перемещений. Зададим аппроксимацию приращений перемещений в форме

$$\Delta u = \Phi \Delta q, \quad (1.147)$$

где  $\Phi$  — матрица функций формы аппроксимаций приращений перемещений,  $\Delta q$  — приращение узловых обобщенных перемещений. Тогда линейаризованные приращения деформаций можно выразить с использованием (1.142) и (1.147) через приращения узловых обобщенных перемещений следующим образом:

$$\Delta \varepsilon = \mathcal{L}_\tau \Delta q, \quad (1.148)$$

где  $\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_\tau \Phi$ . Компоненты вектор-столбца градиентов перемещений также выразим через приращения узловых обобщенных перемещений

$$I \Delta u = \mathcal{R} \Delta q, \quad (1.149)$$

где  $\mathcal{R} = I \Phi$ . Тогда условие равновесия конечно-элементной модели линейаризованной системы (на  $m$ -й итерации) запишется согласно (1.146) — (1.149) в виде

$$\delta \Delta q^T ((K_\tau + S_\tau) \Delta q - \chi_{(m-1)}) = 0.$$

Отсюда, учитывая произвольность выбора коэффициентов  $\delta \Delta q$  получим линейную систему алгебраических уравнений относительно приращений узловых перемещений

$$(K_\tau + S_\tau) \Delta q = \chi_{(m-1)}, \quad (1.150)$$

где

$$K_\tau = \iiint_V \mathcal{L}_\tau^T C_\tau \mathcal{L}_\tau dV; \quad S_\tau = \iiint_V \mathcal{R}^T \Sigma_\tau \mathcal{R} dV;$$

$$\chi_{(m-1)} = \iiint_V \Phi^T g_{\tau+\Delta \tau} dV + \iint_{S_p} \Phi^T p_{\tau+\Delta \tau} dS - \iiint_V \mathcal{L}_\tau^T \sigma_{(m-1)} dV.$$

В полученной системе уравнений (1.150) вектор-столбец  $\chi_{(m-1)}$  представляет (для  $(m)$ -й итерации) невязку между узловыми реакциями элементов и приведенными узловыми силами, а матрица  $(K_\tau + S_\tau)$  характеризует жесткость системы, определенную с учетом предварительно напряженного и деформированного состояния (к моменту времени  $\tau$ ). Решение (1.150) дает значение  $\Delta q$ , которое позволяет выполнить очередную итерацию  $q_{(m)} = q_{(m-1)} + \Delta q$ .

При определении параметра нагружения  $\tau$  матрица  $(K_\tau + S_\tau)$  может перестать быть положительно определенной. Как правило, дальнейшее деформирование такой системы перестает быть устойчивым (этот момент соответствует разрушению или потере устойчивости).

### 1.4.3. Приложения к одномерным системам

Линейаризованную формулировку принципа возможных перемещений (1.133) можно рассматривать как исходную для применения вариационно-матричного способа получения канонических систем и матриц жесткости од-

номерных систем. Представим приращение перемещений, деформаций и градиентов перемещений в виде следующих комбинаций приращений обобщенных перемещений  $\Delta X$  и их производных  $\Delta Y$  (индекс итерации  $(m)$  опущен):

$$\begin{aligned}\Delta u &= F_1 \Delta X + F_2 \Delta Y; \\ \Delta \varepsilon &= B_{1\tau} \Delta X + B_{2\tau} \Delta Y; \\ I \Delta u &= R_1 \Delta X + R_2 \Delta Y,\end{aligned}\quad (1.151)$$

где как и прежде (см. разл. 1.3.1) матрицы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $B_{1\tau}$ ,  $B_{2\tau}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  не содержат дифференциальных операторов  $d/ds$ , поскольку все необходимые производные вынесены в вектор  $\Delta Y$ . Заполнение матриц  $B_{1\tau}$  и  $B_{2\tau}$  происходит согласно представлению линеаризованных (относительно конфигурации  $\tau$ ) деформаций через приращения перемещений. Между приращениями обобщенных перемещений и их производными по определению существует очевидная дифференциальная связь, аналогичная (1.92),

$$\Delta X_{,s} - C_1 \Delta X - C_2 \Delta Y = 0. \quad (1.152)$$

Линеаризованную формулировку принципа возможных перемещений (1.133), записанную для одномерной системы, с учетом (1.144)

$$\begin{aligned}& \int_{s(1)}^{s(2)} \iint_A (\delta \Delta \varepsilon^T C_\tau \Delta \varepsilon + (I \delta \Delta u)^T \Sigma_\tau I \Delta u + \delta \Delta \varepsilon^T \sigma_{(m-1)} - \\ & - \delta \Delta u^T g_{\tau+\Delta\tau}) dA ds - \delta \Delta X_{(1)}^T t_{(1)} - \delta \Delta X_{(2)}^T t_{(2)} = 0\end{aligned}$$

представим с использованием зависимостей (1.151) и дополним условиями связи (1.152). Тогда после интегрирования по площади сечения получим следующую интегральную формулировку задачи:

$$\begin{aligned}& \int_{s(1)}^{s(2)} \left( \delta \Delta X^T (S_{11} \Delta X + S_{12} \Delta Y - C_1^T \lambda - N_1) + \delta \Delta X_{,s}^T \lambda + \right. \\ & + \delta \Delta Y^T (S_{21} \Delta X + S_{22} \Delta Y - C_2^T \lambda - N_2) + \delta \lambda^T (\Delta X_{,s} - C_1 \Delta X - C_2 \Delta Y) \Big) ds - \\ & - \delta \Delta X_{(1)}^T t_{(1)} - \delta \Delta X_{(2)}^T t_{(2)} = 0,\end{aligned}\quad (1.153)$$

где

$$S_{ij} = \iint_A (B_{i\tau}^T C_\tau B_{j\tau} + R_i^T \Sigma_\tau R_j) dA \quad (i, j = 1, 2); \quad (1.154)$$

$$N_i = \iint_A (\kappa_i^T g_{\tau+\Delta\tau} - B_{i\tau}^T \sigma_{(m-1)}) dA \quad (i = 1, 2). \quad (1.155)$$

После интегрирования по частям и исключения  $\Delta Y = S_{22}^{-1} (N_2 + C_2^T \lambda - S_{21} \Delta X)$  получим в качестве уравнений Эйлера искомую каноническую систему, сформулированную относительно приращений обобщенных перемещений и обобщенных силовых факторов

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \lambda \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad (1.156)$$

где матричные блоки  $A_{ij}$  системы (1.156) и векторы свободных членов  $H_i$  определяются формально теми же соотношениями, что и для линейной системы, т. е. (1.103), но при этом под матрицами  $S_{ij}$  понимается их представление согласно (1.154), а под вектор-столбцами  $N_i$  — (1.155). Здесь индекс итерации  $(m)$  опущен.

Следует отметить, что поскольку матрицы  $S_{ij}$  (1.154) содержат информацию о деформированном состоянии (коэффициенты матриц  $B_{i\tau}$ ), соотношениях упругости (коэффициенты матрицы  $C_\tau$ ) и напряженном состоянии

(коэффициенты матрицы  $\Sigma_\tau$ ) для равновесной конфигурации системы в момент времени  $\tau$ , то они в итерационном процессе по  $m$  остаются постоянными. Это приводит к тому, что в итерационном процессе решения задачи для момента  $\Delta\tau + \tau$  остаются неизменными коэффициенты матрицы разрешающей системы, а следовательно, и матрицы фундаментальных решений (1.109), и матрицы жесткости (1.111) одномерных элементов. Таким образом, процесс решения нелинейных одномерных задач будет соответствовать шаговому методу Ньютона с промежуточной коррекцией модифицированным методом Ньютона.

#### 1.4.4. Получение канонических систем для задач устойчивости и колебаний

При использовании вариационной формулировки критерия устойчивости в форме Брайана (1.141) вариационно-матричный способ получения разрешающих уравнений приводит к канонической системе однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (1.157)$$

где под  $\mathbf{X}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$  понимаются дополнительные перемещения и силовые факторы. Матричные блоки  $\mathbf{A}_{ij}$  также вычисляются согласно (1.103) при матрицах, аналогичных (1.154):

$$\mathbf{S}_{ij} = \iint_A (\mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j + \Lambda \mathbf{R}_i^T \Sigma_0 \mathbf{R}_j) dA \quad (i, j = 1, 2), \quad (1.158)$$

где  $\Lambda$  — параметр нагружения;  $\Sigma_0$  — матрица начальных напряжений, соответствующих  $\Lambda = 1$ .

При решении задач о колебаниях предварительно напряженных систем для получения разрешающих дифференциальных уравнений также можно воспользоваться вариационно-матричным способом. Исходная вариационная формулировка задачи будет заключаться в записи принципа возможных перемещений, формально дополненной работой сил инерции (определенных согласно принципу Даламбера) на возможных перемещениях. Таким образом, вместо (1.141) получим

$$\iiint_V (\delta \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon + \delta \eta^T \boldsymbol{\sigma}_\tau - \omega^2 \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dV = 0. \quad (1.159)$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $\rho$  — удельная масса материала. Тогда вариационно-матричный способ также приводит к канонической системе (1.157) с однородными граничными условиями на компоненты  $\mathbf{X}$  или  $\boldsymbol{\lambda}$ , но при этом в вычислениях матричных блоков  $\mathbf{A}_{ij}$  (1.103) под  $\mathbf{S}_{ij}$  следует понимать их представление с учетом упругих свойств, напряженного состояния и приведенных инерционных характеристик:

$$\mathbf{S}_{ij} = \iint_A (\mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j + \Lambda \mathbf{R}_i^T \Sigma_0 \mathbf{R}_j - \omega^2 \rho \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_j) dA, \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.160)$$

Система дифференциальных уравнений, полученная таким образом, позволяет решить следующие задачи на собственные значения: при  $p=0$  и  $\Sigma_0 \neq 0$  можно определить критическую нагрузку  $\Lambda_{кр}$ ; при  $\Lambda=1$ ;  $\Sigma_0 \neq 0$ ;  $p \neq 0$  — найти частоты и формы колебаний упругой системы с учетом предварительного нагружения (в частном случае при  $\Sigma_0=0$  — определить частоты и формы ненагруженной системы).

Коэффициенты матрицы однородной системы дифференциальных уравнений (1.157) в общем случае будут зависеть от координаты одномерной системы  $s$ , а также от параметра нагружения  $\Lambda$  (для задач устойчивости) или частоты колебаний (для задач динамики). Система уравнений (1.157), дополненная однородными граничными условиями, определяет задачу на собственные значения: требуется найти такие значения параметра  $\Lambda$  или  $\omega$ , при которых имеются нетривиальные решения. Для задачи устойчивости практический интерес представляет только наименьшее по модулю собственное значение  $\Lambda_{кр} = |\Lambda|_{\min}$ , которому соответствует значение критической нагрузки.

После выполнения процедур построения матриц фундаментальных решений для отдельных элементов (1.109), матриц жесткости (1.11) и стыковки элементов по геометрическим и силовым факторам с учетом однородных граничных условий получим однородную систему алгебраических уравнений относительно дополнительных перемещений. Формально эту систему представим в виде

$$K(p)X=0, \quad (1.161)$$

где  $p=\Lambda$  для задач устойчивости или  $p=\omega^2$  для задач о собственных колебаниях. Для нетривиального решения полученной системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя. Этот случай соответствует одному из собственных значений параметра  $p$ . Расчет, как правило [21], выполняют следующим образом. Для различных значений параметра  $p$  производят интегрирование системы (1.157), осуществляют стыковку элементов, вычисляют определитель системы (1.161) и следят за сменой знака определителя. Недостатком такого приема определения собственных значений параметра  $p$  является то, что для каждого  $p$  приходится заново интегрировать системы (1.157), что требует значительных затрат машинного времени. Для сокращения вычислительных операций можно использовать прием линеаризации по параметру  $p$  матрицы связи реакций элемента с узловыми перемещениями элемента, т. е. представить связь реакций с перемещениями в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} t_{(1)} \\ t_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^0 & K_{12}^0 \\ K_{21}^0 & K_{22}^0 \end{bmatrix} + \Delta p \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{bmatrix}.$$



В этом случае после стыковки отдельных элементов получим вместо (1.161) разрешающую систему алгебраических уравнений следующей структуры:  $(K^0 + \Delta p K)X = 0$ . Эту систему уравнений можно рассматривать как математическую формулировку обобщенной задачи на собственные значения относительно параметра  $\Delta p$  и использовать для ее решения стандартные эффективные методы (метод определителя, метод итераций в подпространстве и другие). Такой прием линеаризации  $K(p)$  при большом числе элементов существенно уменьшает время расчета, так как матрицы  $K^0$  и  $\bar{K}$  определяются лишь за два приема интегрирования, т. е. для  $p = p_0$  и  $p = p_0 + \Delta p_0$ . В случае необходимости полученное собственное значение  $p = p_*$  можно уточнить, при этом линеаризацию матриц следует провести относительно  $p_0 = p_*$ .

## 1.5. ПРИМЕРЫ

**Пример 1.1.** Определение перемещений и напряжений в равномерно нагретом тонком двухслойном кольце (рис. 1.1). Дано:  $E_{[i]}$  — модули упру-

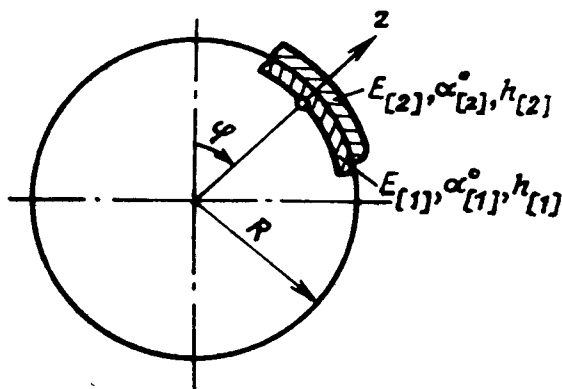


Рис. 1.1. Схема тонкого двухслойного кольца

гости;  $\alpha_{[i]}^0$  — коэффициенты линейного температурного расширения;  $h_{[i]}$  — толщины слоев;  $R$  — средний радиус кольца ( $R \gg h_{[i]}$ );  $T$  — перепад температуры при нагреве;  $i = 1, 2$  — индексы, указывающие на принадлежность к внутреннему и внешнему кольцу;  $b$  — ширина кольца.

Для решения воспользуемся формулировкой задачи в форме (1.18), (1.19), (1.22). Поскольку окружная деформация кольца определяется как  $w/R$ , где  $w$  — нормальное перемещение вдоль оси  $z$ , то операторная матрица  $L$  (1.19) будет содержать всего лишь один коэффициент  $1/R$ . В качестве  $u$  и  $\delta u$  будут выступать  $w$  и  $\delta w$ ; вместо матрицы соотношений упругости  $C$  будет выступать модуль упругости  $E$ , изменяющийся скачком от  $E_{[1]}$  к  $E_{[2]}$  при переходе от внутреннего кольца к внешнему. Напряжения  $\sigma_T$  (1.22) будут равны  $E\alpha^0 T$ , где  $\alpha^0$  так же как и модуль изменяется скачком. С учетом сделанных обозначений вариационная формулировка задачи бу-

дет иметь следующий вид: ( $h=h_{[1]}+h_{[2]}$ )

$$b \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{R} \delta w E \frac{1}{R} w dz R d\varphi = b \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{R} \delta w E \alpha^0 T dz R d\varphi$$

или

$$2\pi R b \delta w \frac{1}{R^2} (E_{[1]} h_{[1]} + E_{[2]} h_{[2]}) w = 2\pi R b \delta w \frac{1}{R} (E_{[1]} h_{[1]} \alpha_{[1]}^0 + E_{[2]} h_{[2]} \alpha_{[2]}^0) T.$$

Из последнего уравнения находим

$$w = \frac{R}{1+\eta} (\alpha_{[1]}^0 + \alpha_{[2]}^0 \eta) T.$$

где

$$\eta = E_{[2]} h_{[2]} / (E_{[1]} h_{[1]}).$$

Воспользовавшись (1.21), определим напряжения

$$\sigma_{[1]} = E_{[1]} \left( \frac{w}{R} - \alpha_{[1]}^0 T \right) = E_{[1]} \frac{\eta}{1+\eta} (\alpha_{[2]}^0 - \alpha_{[1]}^0) T;$$

$$\sigma_{[2]} = E_{[2]} \left( \frac{w}{R} - \alpha_{[2]}^0 T \right) = E_{[2]} \frac{1}{1+\eta} (\alpha_{[1]}^0 - \alpha_{[2]}^0) T.$$

В качестве проверки можно отметить, что суммарное кольцевое усилие  $\sigma_{[1]} h_{[1]} + \sigma_{[2]} h_{[2]} = 0$ , а также при одинаковых коэффициентах  $\alpha_{[1]}^0$  и  $\alpha_{[2]}^0$  напряжения  $\sigma_{[1]} = \sigma_{[2]} = 0$ .

**Пример 1.2.** Определение перемещений и напряжений в трехслойной сфере при равномерных силовых и температурных воздействиях (рис. 1.2).

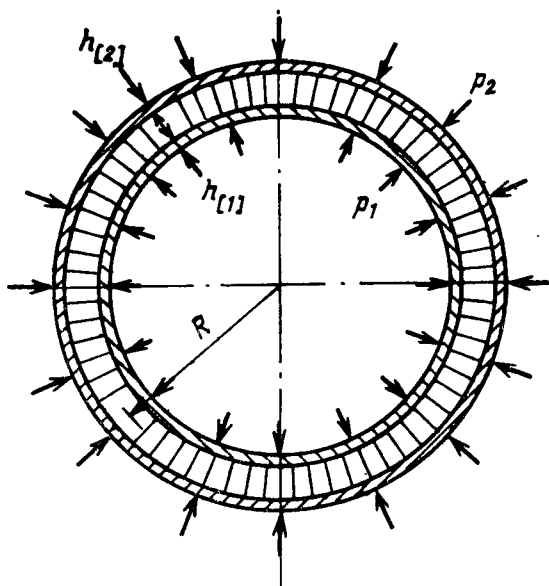


Рис. 1.2. Схема тонкой трехслойной сферы

Дано:  $E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала слоев;  $\alpha^0$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $h_{[i]}$  — толщины слоев;  $R$  — средний радиус сферы ( $R \gg h_{[i]}$ );  $T_{[i]}$  — температуры слоев;  $i = 1, 2$  — индексы, стоящие в квадратных скобках, указывают на принадлежность к внутренней и внешней оболочке;  $p_1$  — внутреннее давление,  $p_2$  — внешнее давление. Заполнитель считать несжимаемым в поперечном направлении.

Для решения воспользуемся формулировкой задачи в форме (1.26). При центрально-симметричном деформировании тонкой трехслойной сферы с несжимаемым заполнителем окружные и меридианальные деформации обоих слоев будут равны  $w/R$ , т. е.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{[i]} \\ \varepsilon_2^{[i]} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [w], \quad (i=1, 2);$$

и операторные матрицы  $L_{[i]} T = \frac{1}{R} [1, 1]$ . Соотношения упругости, соответствующие записи (1.21), в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{[i]} \\ \sigma_2^{[i]} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{[i]} \\ \varepsilon_2^{[i]} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha^0 T_{[i]}}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2). \quad (1.162)$$

Тогда вариационную формулировку задачи (1.26) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta w \sum_{i=1}^2 \frac{h_{[i]} E}{R^2 (1-\mu^2)} [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w = \\ = \delta w \left( p_1 - p_2 + \sum_{i=1}^2 \frac{E\alpha^0 h_{[i]} T_{[i]}}{R (1-\mu^2)} [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

или после выполнения матричных умножений

$$\delta w = \frac{2E(h_{[1]} + h_{[2]})}{R^2(1-\mu)} w = \delta w \left( p_1 - p_2 + \frac{\alpha E \alpha^0 (h_{[1]} T_{[1]} + h_{[2]} T_{[2]})}{R(1-\mu)} \right).$$

Отсюда

$$w = \frac{R}{1+\eta} \left[ \frac{(p_1 - p_2)(1-\mu)R}{2Eh_{[1]}} + \alpha^0 (T_{[1]} + \eta T_{[2]}) \right],$$

где

$$\eta = h_{[2]}/h_{[1]}.$$

Напряжения в слоях вычисляются согласно (1.162) при  $\varepsilon_1^{[i]} = \varepsilon_2^{[i]} = w/R$

$$\sigma_1^{[1]} = \sigma_2^{[1]} = \frac{1}{1+\eta} \left[ \frac{(p_1 - p_2)R}{2h_{[1]}} + \frac{E\alpha^0}{1-\mu} \eta (T_{[2]} - T_{[1]}) \right];$$

$$\sigma_1^{[2]} = \sigma_2^{[2]} = \frac{1}{1+\eta} \left[ \frac{(p_1 - p_2)R}{2h_{[1]}} + \frac{E\alpha^0}{1-\mu} (T_{[1]} - T_{[2]}) \right].$$

Контактные напряжения поперечного сжатия заполнителя (в рассматриваемом случае являются статически определенным фактором) определяются из уравнений равновесия обшивок

$$\begin{aligned} p_k = p_1 - 2\sigma_1^{[1]} \frac{h_{[1]}}{R} = p_2 + 2\sigma_1^{[2]} \frac{h_{[2]}}{R} = \\ = \frac{1}{1+\eta} \left[ p_1 \eta + p_2 - \frac{2E\alpha^0 h_{[1]}}{R(1-\mu)} (T_{[2]} - T_{[1]}) \right]. \end{aligned}$$

**Пример 1.3.** Две полосы единичной ширины и длины  $l$  растягиваются силой  $p$  (рис. 1.3). Выявить закон распределения нормальных усилий и сдвиговых погонных усилий в клеевом слое, если из эксперимента (рис. 1.4) определено, что сдвиговые усилия в клеевом слое единичной длины пропорциональны взаимному смещению слоев, т. е.  $t = k(u_{[1]} - u_{[2]})$ ;  $k$  — экспериментально найденный коэффициент;  $(u_{[1]} - u_{[2]})$  — взаимное смещение слоев, вызванное деформацией клеевого слоя. Жесткости на растяжение нижней и верхней полос соответственно равны  $B_{[1]}$  и  $B_{[2]}$ .

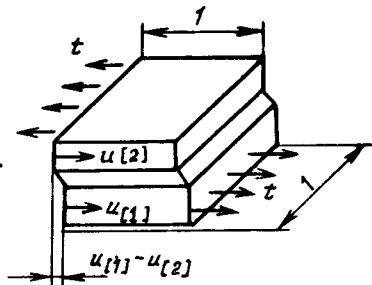
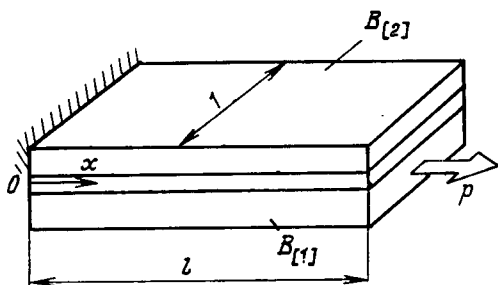


Рис. 1.3. Схема клеевого нахлесточного соединения

Рис. 1.4. К определению жесткости клеевого слоя

Запишем основные исходные соотношения. Перемещения вдоль оси  $x$  для нижней и верхней полос обозначим  $u_{[1]}$  и  $u_{[2]}$ . Деформации полос и клеевого слоя определим следующими зависимостями:

$$\varepsilon_{[1]} = u'_{[1]}; \quad \varepsilon_{[2]} = u'_{[2]}; \quad \gamma = u_{[1]} - u_{[2]},$$

где  $u'$  — производная от  $u$  по  $x$ .

Соотношения упругости будут иметь вид

$$N_{[1]} = B_{[1]}\varepsilon_{[1]}; \quad N_{[2]} = B_{[2]}\varepsilon_{[2]}; \quad t = k\gamma.$$

Наиболее просто данную задачу решить методом сил. Однако, для того чтобы определить независимые вариации сил необходимо воспользоваться уравнениями равновесия. Эти уравнения получим с использованием принципа возможных перемещений, который для рассматриваемого случая формулируется следующим образом:

$$\int_0^l \left( \sum_{i=1}^2 N_{[i]} \delta \varepsilon_{[i]} + t \delta \gamma \right) dx - p \delta u_{[1]}(l) = 0$$

или

$$\int_0^l (N_{[1]} \delta u'_{[1]} + N_{[2]} \delta u'_{[2]} + t (\delta u_{[1]} - \delta u_{[2]})) dx - p \delta u_{[1]}(l) = 0.$$

После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^l (\delta u_{[1]} (-N'_{[1]} + t) + \delta u_{[2]} (-N'_{[2]} - t)) dx + \\ & + [\delta u_{[1]} N_{[1]}]_0^l + [\delta u_{[2]} N_{[2]}]_0^l - p \delta u_{[1]}(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Из (1.163) следуют уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} N'_{[1]} - t &= 0; \\ N'_{[2]} + t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.164)$$

и граничные условия при  $x=0$   $N_{[1]}=0$ ;  $u_{[2]}=0$  и при  $x=1$   $N_{[1]}-p=0$ ;  $N_{[2]}=0$ . Уравнения равновесия (1.164) и силовые граничные условия для  $N_{[2]}$  будут выполняться, если принять

$$t = N'_{[1]}; \quad N_{[2]} = p - N_{[1]}. \quad (1.165)$$

Отсюда следует, что независимой вариацией сил может выступать  $\delta N_{[1]}$ , а для вариаций  $\delta t$  и  $\delta N_{[2]}$  согласно (1.65) получим

$$\delta t = \delta N'_{[1]}; \quad \delta N_{[2]} = -\delta N_{[1]}. \quad (1.166)$$

После этого можно сформулировать задачу методом сил. Для этого следует записать вариационное уравнение, соответствующее (1.69),

$$\int_0^l \left( \frac{\delta N_{[1]} N_{[1]}}{B_{[1]}} + \frac{\delta N_{[2]} N_{[2]}}{B_{[2]}} + \frac{\delta t t}{k} \right) dx = 0$$

или с учетом (1.165), (1.166), выполнив интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( \frac{\delta N_{[1]} N_{[1]}}{B_{[1]}} - \frac{\delta N_{[1]} (p - N_{[1]})}{B_{[2]}} + \frac{\delta N'_{[1]} N'_{[1]}}{k} \right) dx = \\ & = \int_0^l \delta N_{[1]} \left( \frac{N_{[1]}}{B_{[1]}} + \frac{N_{[1]}}{B_{[2]}} - \frac{p}{B_{[2]}} - \frac{N'_{[1]}}{k} \right) dx + \left[ \delta N_{[1]} \frac{N_{[1]}}{k} \right]_0^l = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует разрешающее дифференциальное уравнение

$$N''_{[1]} - \alpha^2 N_{[1]} = -\bar{p}, \quad (1.167)$$

где  $\alpha^2 = k(1/B_{[1]} + 1/B_{[2]})$ ;  $\bar{p} = kp/B_{[2]}$ , и граничные условия: при  $x=0$ ,  $N_{[1]}=0$ ; при  $x=l$ ,  $N_{[1]}=p$ . Решением (1.167) будет

$$N_{[1]} = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x + \bar{p}/\alpha^2.$$

Определив постоянные  $A$  и  $B$  из граничных условий

$$A = \frac{p}{\operatorname{sh} \alpha l} \left( 1 - \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha l}{1 + \eta} \right); \quad B = -\bar{p}/\alpha^2 = -p/(1 + \eta),$$

где  $\eta = B_{[2]}/B_{[1]}$ , окончательно получим закон распределения усилий в нижней полосе:

$$N_{[1]} = \frac{p}{(1 + \eta) \operatorname{sh} \alpha l} [\operatorname{sh} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha (l - x) + \eta \operatorname{sh} \alpha x].$$

Согласно (1.165) в верхней полосе нормальные усилия будут равны  $N_{[2]} = p - N_{[1]}$ , а погонные сдвиговые усилия в клеевом слое  $t = N'_{[1]}$  будут определяться следующей зависимостью:

$$t = \frac{p\alpha}{(1 + \eta) \operatorname{sh} \alpha l} [\operatorname{ch} \alpha (l - x) + \eta \operatorname{ch} \alpha x].$$

Характер изменения нормальных усилий в полосах и касательных погонных усилий в слое клея показан на рис. 1.5. Полученное решение качественно совпадает с решением задачи о распределении усилий в винте и гайке [36].

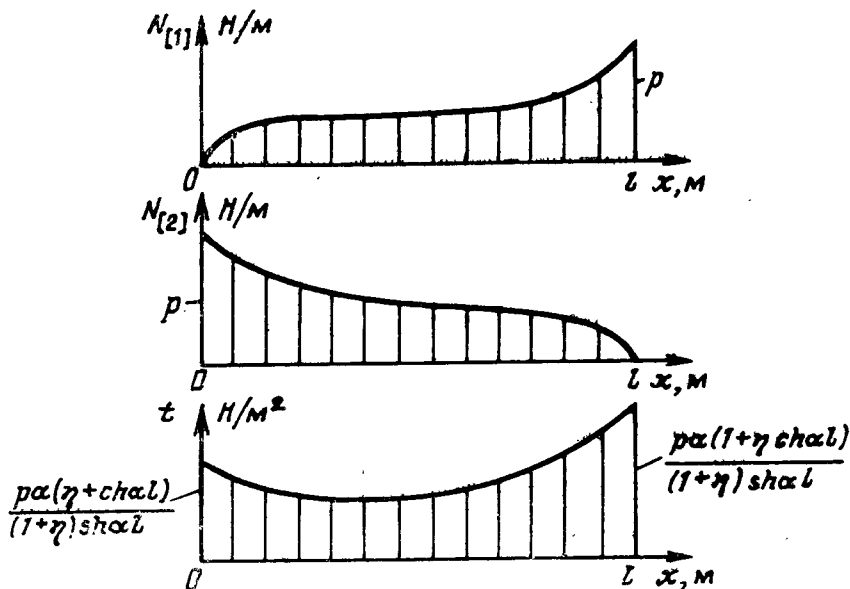


Рис. 1.5. Эпюры распределения нормальных усилий в полосах и касательных напряжений в клеевом слое

**Пример 1.4.** Определить нормальное перемещение  $w$  и изгибающий момент  $M$  в круговом тонком защемленном стержне (рис. 1.6) ( $\varphi_0 \leq 1$  рад). Сравнить точное решение с приближенными решениями, полученными методом перемещений и смешанным методом.

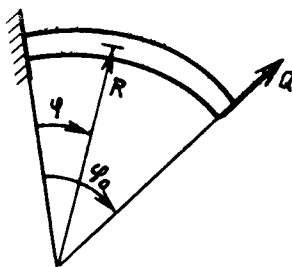


Рис. 1.6. Изгиб защемленного тонкого кругового стержня

Для тонкого кольца воспользуемся гипотезой о нерастяжимости осн. Расчет проведем без учета деформаций поперечного сдвига. Изменение кривизны будем определять

$$\kappa = \frac{1}{R^2} (w'' + w), \quad (1.168)$$

где  $w''$  — вторая производная от  $w$  по углу  $\varphi$ .

Соотношение упругости запишется в виде

$$M = D\kappa, \quad (1.169)$$

где  $D$  — изгибная жесткость.

Для получения разрешающего уравнения воспользуемся принципом возможных перемещений, формулировка которого для нашего случая будет выглядеть так:

$$\int_0^{\varphi_0} \delta \kappa M R d\varphi - \delta w(\varphi_0) Q = 0, \quad (1.170)$$

где согласно (1.168)  $\delta \kappa = (\delta w'' + \delta w)/R^2$ . После интегрирования (1.170) по частям получим

$$\int_0^{\varphi_0} (M'' + M) \delta w \frac{1}{R} d\varphi + \frac{1}{R} [\delta w' M]_0^{\varphi_0} - \frac{1}{R} [\delta w M']_0^{\varphi_0} - \delta w(\varphi_0) Q = 0. \quad (1.171)$$

С учетом (1.168) и (1.169) из (1.171) при  $D = \text{const}$  получим дифференциальное уравнение

$$w^{IV} + 2w'' + w = 0 \quad (1.172)$$

и граничные условия при  $\varphi = 0$   $w = 0$ ,  $w' = 0$ ; при  $\varphi = \varphi_0$   $w'' + w = 0$ ;  $D(w'''' + w') = -QR$ . Решением (1.172) будет

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi) &= \frac{QR}{2D} (\varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos \varphi_0 \sin \varphi); \\ M(\varphi) &= QR \sin(\varphi_0 - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.173)$$

В сечении  $\varphi = \varphi_0$  будет максимальное значение прогиба

$$w(\varphi_0) = \frac{QR^2}{D} \left( \frac{1}{2} \varphi_0 - \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \right).$$

В сечении  $\varphi = 0$  — максимальный изгибающий момент

$$M(0) = QR \sin \varphi_0.$$

Для малых значений угла раствора  $\varphi_0$  решение (1.173) можно представить в виде

$$w(\varphi) \approx \frac{QR^2}{D} \left( \frac{1}{2} \varphi_0 \varphi^2 - \frac{1}{6} \varphi^3 \right); \quad w(\varphi_0) \approx \frac{QR^2 \varphi_0^3}{3D} \quad (1.174)$$

$$M(\varphi) \approx QR(\varphi_0 - \varphi); \quad M(0) \approx QR\varphi_0.$$

При решении задачи методом перемещений воспользуемся аппроксимацией  $w$ , удовлетворяющей главным граничным условиям  $w(0) = w'(0) = 0$ , и примем по (1.174)

$$w = q_1 \varphi^2 + q_2 \varphi^3$$

или в матричном виде

$$w = \Phi q, \quad (1.175)$$

где  $\Phi = [\varphi^2, \varphi^3]$ ;  $q = [q_1, q_2]^T$ ;  $\Phi$  — матрица функций формы аппроксимации;  $q$  — вектор неизвестных коэффициентов (обобщенных перемещений), подлежащих определению.

Согласно методу перемещений выражение для изменения кривизны строится с учетом выражений (1.168) и (1.169):

$$\kappa = Bq, \quad (1.176)$$

где

$$B = \frac{1}{R^2} (\Phi'' + \Phi) = \frac{1}{R^2} [(2 + \varphi^2) (6\varphi + \varphi^3)].$$

Воспользовавшись (1.169), (1.170), (1.175) и (1.176), получим вариационную задачу, соответствующую методу перемещений:

$$\int_0^{\varphi_0} \delta q^T B^T D B q R d\varphi - \delta q^T \Phi^T (\varphi_0) Q = 0. \quad (1.177)$$

Уравнение (1.177) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $q$

$$Kq = P, \quad (1.178)$$

где

$$K = \int_0^{\varphi_0} B^T D B R d\varphi; \quad P = Q \Phi^T (\varphi_0).$$

или в развернутом виде

$$K = \frac{D}{R^2} \int_0^{\varphi_0} \begin{bmatrix} (2 + \varphi^2) \\ (6\varphi + \varphi^3) \end{bmatrix} [(2 + \varphi^2) (6\varphi + \varphi^3)] d\varphi =$$

$$= \frac{D}{R^2} \begin{bmatrix} \left( 4\varphi_0 + \frac{4}{3} \varphi_0^3 + \frac{1}{5} \varphi_0^5 \right) \left( 6\varphi_0^2 + 2\varphi_0^4 + \frac{1}{6} \varphi_0^6 \right) \\ \left( 6\varphi_0^2 + 2\varphi_0^4 + \frac{1}{6} \varphi_0^6 \right) \left( 12\varphi_0^3 + \frac{12}{5} \varphi_0^5 + \frac{1}{7} \varphi_0^7 \right) \end{bmatrix}; \quad (1.179)$$

$$P = Q [\varphi_0^2, \varphi_0^4]^T; \quad q = [q_1, q_2]^T.$$

Аналитическое решение (1.178) при матрице  $K$  (1.179) весьма громоздко, поэтому ограничимся анализом частных случаев.

При малых углах раствора  $\varphi_0$  в коэффициентах матрицы жесткости можно ограничиться удержанием лишь первых слагаемых. Тогда система уравнений (1.178) будет выглядеть так:

$$\frac{D}{R^2} \begin{bmatrix} 4\varphi_0 & 6\varphi_0^2 \\ 6\varphi_0 & 12\varphi_0^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \varphi_0^2 \\ \varphi_0^4 \end{bmatrix}. \quad (1.180)$$

Решением (1.180) будут коэффициенты

$$q_1 = \frac{QR^2\varphi_0}{2D}; \quad q_2 = -\frac{QR^2}{6D}$$

и согласно (1.175) при  $\varphi = \varphi_0$  получим результат, соответствующий приближенному значению прогиба  $\varpi(\varphi_0)$ . Значение изгибающего момента определяется зависимостями (1.169), (1.176)  $M_{(0)} = QR(\varphi_0)$ . Граничное условие по моменту при  $\varphi = \varphi_0$  не выполняется  $M(\varphi_0) = QR^2\varphi_0^3/6$ .

При  $\varphi_0 = 1$  рад система уравнений (1.178) с матрицей  $K$  (1.179) будет иметь следующий вид:

$$\frac{D}{R^2} \begin{bmatrix} 5\frac{8}{15} & 8\frac{1}{6} \\ 8\frac{1}{6} & 14\frac{19}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.181)$$



Отсюда получим

$$q_1 = \frac{QR^3}{D} \cdot 0,463; \quad q_2 = -\frac{QR^3}{D} \cdot 0,191;$$

$$w(1) = \frac{QR^3}{D} \cdot 0,272;$$

$$M(1) = QR \cdot 0,049;$$

$$M(0) = QR \cdot 0,942.$$

Получим решение задачи смешанным методом. Теперь наряду с аппроксимацией нормального прогиба (1.175) зададимся независимой аппроксимацией изменения кривизны  $\kappa$  в виде

$$\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 \varphi$$

или в матричной записи

$$\kappa = \omega \alpha, \quad (1.182)$$

где  $\omega = [1, \varphi]; \alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ .

Воспользовавшись смешанной вариационной формулировкой (1.82), (1.83), запишем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{R^2} (\delta w'' + \delta w) D \kappa R d\varphi - \delta w(\varphi_0) Q &= 0; \\ \int_0^{\varphi_0} \delta \kappa D \left( \frac{1}{R^2} (w'' + w) - \kappa \right) R d\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.183)$$

С учетом аппроксимаций  $w$  (1.175),  $\kappa$  (1.182) система уравнений (1.183) преобразуется в вид

$$R \delta q^T \left( \int_0^{\varphi_0} B^T D \omega d\varphi \right) \alpha - \delta q^T \Phi^T(\varphi_0) Q = 0;$$

$$R \delta \alpha^T \int_0^{\varphi_0} \omega^T D (Bq - \omega \alpha) d\varphi = 0.$$

Отсюда получаем две системы уравнений

$$G^T \alpha - P = 0; \quad (1.184)$$

$$Gq - H\alpha = 0, \quad (1.185)$$

где

$$G = R \int_0^{\varphi_0} \omega^T D B d\varphi; \quad H = R \int_0^{\varphi_0} \omega^T D \omega d\varphi;$$

$$P = Q \Phi^T(\varphi_0); \quad B = (\Phi'' + \Phi)/R^2$$

или в развернутом виде

$$G = \frac{D}{R} \int_0^{\varphi_0} \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix} [(2 + \varphi^2)(6\varphi + \varphi^3)] d\varphi = \frac{D}{R} \int_0^{\varphi_0} \begin{bmatrix} (2 + \varphi^2)(6\varphi + \varphi^3) \\ (2\varphi + \varphi^3)(6\varphi^2 + \varphi^4) \end{bmatrix} d\varphi =$$

$$= \frac{D}{R} \left[ \begin{array}{l} \left( 2\varphi_0 + \frac{1}{3}\varphi_0^3 \right) \left( 3\varphi_0^2 + \frac{1}{4}\varphi_0^4 \right) \\ \left( \varphi_0^2 + \frac{1}{4}\varphi_0^4 \right) \left( 2\varphi_0^3 + \frac{1}{5}\varphi_0^5 \right) \end{array} \right];$$

$$H = DR \int_0^{\varphi_0} \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix} [1\varphi] d\varphi = DR \int_0^{\varphi_0} \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \varphi & \varphi^2 \end{bmatrix} d\varphi = DR \begin{bmatrix} \varphi_0 & \frac{1}{2}\varphi_0^2 \\ \frac{1}{2}\varphi_0^2 & \frac{1}{3}\varphi_0^3 \end{bmatrix}. \quad (1.186)$$

Исключив из (1.185) коэффициенты  $\alpha$ :

$$\alpha = H^{-1}Gq \quad (1.187)$$

и подставив их в (1.184), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения  $q$ :

$$Kq = P, \quad (1.188)$$

где

$$K = G^T H^{-1} G;$$

$$H^{-1} = \frac{1}{DR} \begin{bmatrix} 4/\varphi_0 & -6/\varphi_0^2 \\ -6/\varphi_0^2 & 12\varphi_0^2 \end{bmatrix}.$$

Для малых  $\varphi_0$ , оставив в коэффициентах матрицы  $G$  (1.186) только первые слагаемые и выполнив операции (1.188), получим систему уравнений (1.180) и соответствующие решения для  $q_1$  и  $q_2$ . Соответствующие коэффициенты  $\alpha$  (1.187) будут равны

$$\alpha_1 = \frac{QR}{D} \varphi_0; \quad \alpha_2 = -\frac{QR}{D},$$

и изменение кривизны  $\kappa$  (1.182) получит вид

$$\kappa = \frac{QR}{D} (\varphi_0 - \varphi),$$

что соответствует  $M(\varphi)$  по (1.174).

При  $\varphi_0 = 1$  разрешающая система уравнений с матрицей  $K$  (1.188) в развернутом виде выглядит так (можно сравнить с системой (1.181), полученной методом перемещений):

$$\frac{D}{R^2} \begin{bmatrix} 5 \frac{19}{36} & 8 \frac{19}{120} \\ 8 \frac{19}{120} & 14 \frac{53}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В результате решения получим

$$q_1 = \frac{QR^2}{D} \cdot 0,464; \quad q_2 = -\frac{QR^2}{D} \cdot 0,191.$$

Выполнив операции (1.187) при  $\varphi_0 = 1$ , определим  $\alpha_1 = 0,888$ ;  $\alpha_2 = -0,854$ . Тогда согласно (1.182) и (1.169) можно вычислить  $M(0) = QR \cdot 0,888$ ;  $M(1) = QR \cdot 0,034$ .

**Пример 1.5.** Требуется получить каноническую систему и матрицу фундаментальных решений задач статики для многослойной полосы единичной ширины. Расчет выполнить с учетом деформаций поперечных сдвигов. Структура многослойной полосы — симметричная относительно срединной поверхности.

В качестве исходных данных примем следующие предположки.

## 1. Кинематика деформирования

Согласно рис. 1.7 примем, что в процессе деформирования полосы волокна в направлении оси  $z$  не изменяют своей длины; в отличие от классической гипотезы Бернулли предположим, что сечение полосы остается плоским, но поворачивается на угол  $\theta$ , отличный от угла поворота нормали. Тогда распределение перемещений можно представить следующим образом:

$$v_1 = z\theta;$$

$$v_3 = w;$$

$$v_2 = 0.$$

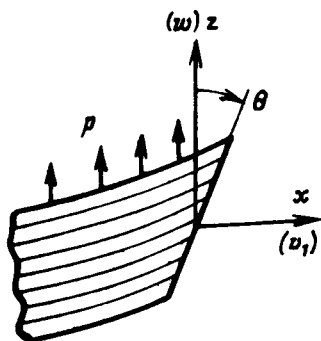


Рис. 1.7. Кинематика деформирования многослойной полосы при изгибе

## 2. Связь деформаций с перемещениями

Ограничившись решением задачи в геометрически линейной постановке, примем следующие выражения для деформаций слоя, имеющего координату  $z$

$$\epsilon_{1(z)} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = z\theta';$$

$$\gamma_{31(z)} = \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = \theta + w',$$

где штрихом обозначена производная по  $x$ .

### 3. Соотношения упругости

Будем считать, что изгиб полосы происходит без растяжения срединной поверхности. В качестве внутренних силовых факторов выступают изгибающий момент  $M$  и перерезывающая сила  $Q$ , для которых оказываются справедливыми следующие приведенные по толщине соотношения упругости:

$$\begin{aligned} M &= D\kappa; \\ Q &= B_{xz}\gamma, \end{aligned} \quad (1.189)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= \theta'; \\ \gamma &= \theta + w'; \end{aligned} \quad (1.190)$$

$D$  и  $B_{xz}$  — приведенные жесткости на изгиб и поперечный сдвиг,

$$\begin{aligned} D &= \int_{-h/2}^{h/2} E_x z^2 dz; \\ B_{xz} &= h^2 \left( \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz}{G_{xz}} \right)^{-1}; \end{aligned}$$

$E_x$  — модуль упругости материала полосы при растяжении вдоль оси  $x$ ;  $G_{xz}$  — модуль упругости материала полосы при поперечных сдвигах;  $E_x$  и  $G_{xz}$  считаются известными кусочно-постоянными функциями аргумента  $z$ . Более подробно вопрос о вычислении приведенных жесткостных характеристиках будет рассматриваться в гл. 2.

При выводе канонической системы дифференциальных уравнений (разд. 1.3) в качестве обобщенных перемещений  $X$  примем

$$X = [w, \theta]^T.$$

В качестве обобщенных производных  $Y$  можно принять

$$Y = [\kappa, \gamma]^T.$$

Условия связи между  $X$  и  $Y$  (см. (1.92)) в рассматриваемом случае будут формулироваться на основе очевидных соотношений (1.190)

$$\begin{aligned} w' + \theta - \gamma &= 0; \\ \theta' - \kappa &= 0. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Для получения канонической системы разрешающих уравнений воспользуемся формулировкой принципа возможных перемещений, дополненного условиями связи (1.191). Тогда с учетом (1.190) для случая действия распределенной нормальной нагрузки  $p$  (см. рис. 1.8) запишем:

$$\begin{aligned} \int_0^l (D\kappa\delta\kappa + B_{xz}\gamma\delta\gamma - p\delta w + \lambda_1(\delta w' + \delta\theta - \delta\gamma) + \lambda_2(\delta\theta' - \delta\kappa) + \\ + \delta\lambda_1(w' + \theta - \gamma) + \delta\lambda_2(\theta' - \kappa)) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.192)$$

Выполним в (1.192) интегрирование по частям и избавимся от производных при вариациях  $\delta w$  и  $\delta\theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^l (\delta w(-\lambda_1' - p) + \delta\theta(\lambda_1 - \lambda_2') + \delta\kappa(D\kappa - \lambda_2) + \delta\gamma(B_{xz}\gamma - \lambda_1) + \\ + \delta\lambda_1(w' + \theta - \gamma) + \delta\lambda_2(\theta' - \kappa)) dx + [\lambda_1\delta w]_0^l + [\lambda_2\delta\theta]_0^l = 0. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Приравняв в (1.193) нулю слагаемые, содержащие компоненты вектора  $\delta Y$  (т. е.  $\delta\kappa$  и  $\delta\gamma$ ), получим

$$D\kappa - \lambda_2 = 0; \quad B_{xz}\gamma - \lambda_1 = 0. \quad (1.194)$$

Отсюда

$$\kappa = \lambda_2/D; \quad \gamma = \lambda_1/B_{xz}. \quad (1.195)$$

Тогда из (1.193) с учетом (1.195) получим искомую каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} w' + \theta - \lambda_1/B_{xz} &= 0; \\ \theta' - \lambda_2/D &= 0; \\ -\lambda_1' - p &= 0; \\ \lambda_1 - \lambda_2' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.196)$$

Сравнив (1.194) с (1.189), заметим, что  $\lambda_2 = M$ ,  $\lambda_1 = Q$  и систему (1.196) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} w' &= -\theta + Q/B_{xz}; \\ \theta' &= M/D; \\ Q' &= -p; \\ M' &= Q, \end{aligned} \quad (1.197)$$

или в окончательной матричной форме

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ Q \\ M \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/B_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ Q \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.198)$$

Полученная система дифференциальных уравнений соответствует системе (1.107).

Как видно из рис. 1.8 (если силовые факторы  $Q+dQ$  и  $M+dM$  направить в сторону положительных значений  $w$  и  $\theta$ ), последние два уравнения системы (1.197) или (1.198) представляют уравнения равновесия элемента стержня.

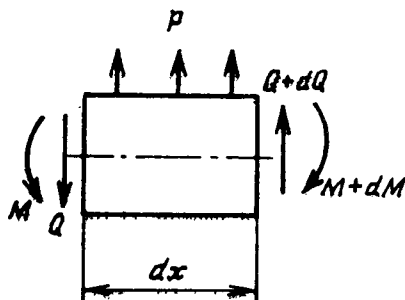


Рис. 1.8. К уравнениям равновесия элемента стержня

Как следует из (1.193) геометрические граничные условия могут задаваться на компоненты вектора  $X$ , т. е. на перемещение  $w$  и угол поворота сечения  $\theta$  (заметим, что на  $w'$  граничные условия не задаются); силовые условия могут задаваться на компоненты вектора  $\lambda$ , т. е. на перерезывающую силу  $Q$  и изгибающий момент  $M$ .

Полученная разрешающая система дифференциальных уравнений (1.198) достаточно проста и позволяет без особых трудов построить фундаментальные и частные решения для случая постоянных по длине жесткостей  $D$ ,

$B_{xz}$  и нагрузки  $p$ :

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ Q(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x & (x/B_{xz} - x^3/(6D)) & -x^3/(2D) \\ 0 & 1 & x^2/(2D) & x/D \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ \theta(0) \\ Q(0) \\ M(0) \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} x^4/(24D) - x^2/(2B_{xz}) \\ -x^3/(6D) \\ -x \\ -x^2/2 \end{bmatrix}. \quad (1.199)$$

Решение в форме (1.199) записано через начальные параметры с помощью матрицы фундаментальных решений и вектора частного решения. Такая форма записи весьма удобна для решения задач. Два начальных параметра определяются граничными условиями при  $x=0$ . Два остальных параметра находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая представляет запись граничных условий при  $x=l$  с использованием (1.199).

**Пример 1.6.** Используя решение предыдущего примера, рассмотреть задачи об изгибе стержней, показанных на рис. 1.9, а и 1.9, б.

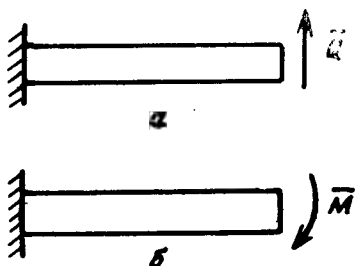


Рис. 1.9. Расчетные схемы изгиба стержней

Для консольно защемленного стержня (при  $x=0$ ,  $w(0)=0$ ;  $\theta(0)=0$ ), нагруженного на правом краю перерезывающей силой (рис. 1.9, а), граничные условия при  $x=l$  будут записываться в виде

$$Q(l)=Q(0)=\bar{Q}; \quad M(l)=lQ(0)+M(0)=0.$$

Отсюда получим  $Q(0)=\bar{Q}$ ;  $M(0)=-\bar{Q}l$ . Тогда с использованием матрицы фундаментальных решений запишем

$$w(x) = \frac{\bar{Q}l^3}{D} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{x}{l} \frac{D}{B_{xz}l^2} \right];$$

$$\theta(x) = \frac{\bar{Q}l^2}{Dx} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{x}{l} \right];$$

$$Q(x) = \bar{Q};$$

$$M(x) = -\bar{Q}l \left( 1 - \frac{x}{l} \right).$$

Максимальный прогиб при  $x=l$

$$w(l) = \frac{\bar{Q}l^3}{D} \left( \frac{1}{3} + \frac{D}{B_{xz}l^2} \right).$$

В данном примере учет деформаций поперечного сдвига привел к поправке  $D/(B_{xz}l^2)$ , которая для изотропных материалов имеет порядок  $(h/l)^2$ .

Для задачи, представленной на рис. 1.9, б, получим  $Q(0)=0$ ;  $M(0)=\bar{M}$  и решение определится в виде

$$w(x) = -\frac{\bar{M}l^2}{Dx} \left(\frac{x}{l}\right)^2; \quad \theta(x) = \frac{\bar{M}l}{Dx} \left(\frac{x}{l}\right); \quad Q(x)=0; \quad M(x)=\bar{M}.$$

Оно ничем не отличается от классического решения изгиба балки. Такое совпадение объясняется тем, что в данной задаче перерезывающая сила в любом сечении равна нулю, и поэтому изгиб стержня происходит без деформации поперечного сдвига.

**Пример 1.7.** Требуется получить каноническую систему и матрицу фундаментальных решений для задач устойчивости многослойных стержней, имеющих симметричную структуру. Определим критическую силу сжатого защемленного по концам стержня. Расчет выполним с учетом деформации поперечных сдвигов.

Кинематику деформирования и соотношения упругости примем такими же, как и при решении задачи статики (пример 1.5):

$$e_{1(x)} = x\theta'; \quad \gamma_{31(x)} = \theta + w'; \quad \eta_1 = \frac{1}{2}(w')^2;$$

$$M = D\kappa; \quad Q = B_{xz}\gamma,$$

где

$$\kappa = \theta'; \quad \gamma = \theta + w'.$$

Для получения канонической системы воспользуемся энергетическим критерием Брайана (1.141), дополненного условиями связи

$$\int_0^l (D\kappa\delta\kappa + B_{xz}\gamma\delta\gamma - \delta w'w'N + \lambda_1(\delta w' + \delta\theta - \delta\gamma) + \\ + \lambda_2(\delta\theta' - \delta\kappa) + \delta\lambda_1(w + \theta - \gamma) + \delta\lambda_2(\theta' - \kappa)) dx = 0, \quad (1.200)$$

где  $N$  — осевая сжимающая сила.

После интегрирования (1.200) по частям с учетом того, что  $\delta w'w'N = (\delta\gamma - \delta\theta)(\gamma - \theta)N$  получим

$$\int_0^l (\delta w(-\lambda_1') + \delta\theta(\lambda_1 - \lambda_2' + \gamma N - \theta N) + \delta\kappa(D\kappa - \lambda_2) + \\ + \delta\gamma(B_{xz}\gamma - \lambda_1 - \gamma N + \theta N) + \delta\lambda_1(w' + \theta - \gamma) + \\ + \delta\lambda_2(\theta' - \kappa)) dx + [\lambda_1\delta w]_0^l + [\lambda_2\delta\theta]_0^l = 0. \quad (1.201)$$

Приравняв в (1.201) нулю слагаемые, содержащие  $\delta\kappa$ ,  $\delta\gamma$ , получим

$$\kappa = \lambda_2/D; \quad \gamma = \lambda_1/(B_{xz} - N) - \theta \frac{N}{B_{xz} - N}. \quad (1.202)$$

Тогда из (1.201) с учетом (1.202) получим искомую каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} w' + \theta - \frac{\lambda_1}{B_{xz} - N} + \theta \frac{N}{B_{xz} - N} &= 0; \\ \theta' - \lambda_2/D &= 0; \\ -\lambda_1' &= 0; \\ \lambda_1 - \lambda_2' + \lambda_1 \frac{N}{B_{xz} - N} - \theta \frac{N^2}{B_{xz} - N} - \theta N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.203)$$

Из соотношений упругости и выражений (1.202) следует, что

$$\lambda_1 = \gamma B_{xz} - N w' = Q_*; \quad \lambda_2 = M,$$

где  $Q_*$  представляет сумму проекций перерезывающей силы  $Q$  и осевой сжимающей силы  $N$  на ось  $Oz$  (рис. 1.10). Тогда систему (1.203) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} w' &= -\theta \frac{1}{1 - N/B_{xz}} + Q_* \frac{1}{B_{xz}(1 - N/B_{xz})}; \\ \theta &= M/D; \\ Q_*' &= 0; \\ M' &= \frac{Q_*}{1 - N/B_{xz}} - \theta \frac{N}{1 - N/B_{xz}} \end{aligned} \right\} \quad (1.204)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ Q_* \\ M \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1/(1 - N/B_{xz}) & 1/(B_{xz}(1 - N/B_{xz})) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N/(1 - N/B_{xz}) & 1/(1 - N/B_{xz}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ Q_* \\ M \end{bmatrix}. \quad (1.205)$$

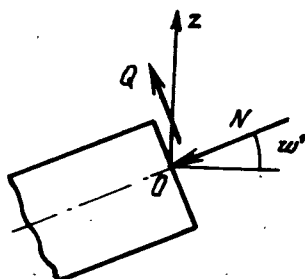


Рис. 1.10. К определению проекций внутренних сил на ось  $Oz$

Полученная система уравнений (1.204) или (1.205) представляет искомую каноническую систему. В качестве граничных условий согласно (1.201) на краях стержня могут быть заданы либо главные условия  $w=0$ ,  $\theta=0$ ; либо естественные  $Q_*=0$ ;  $M=0$ .

Получим матрицу фундаментальных решений для системы (1.204) в случае  $N = \text{const}$ . Обозначим

$$k^2 = \frac{N}{D(1 - N/B_{xz})} \quad \left( \text{или} \quad \frac{1}{1 - N/B_{xz}} = \frac{Dk^2}{N} \right)$$

и представим (1.204) в виде

$$w' = -\frac{Dk^2}{N} \theta + \frac{Dk^2}{B_{xz}N} Q_*; \quad (1.206)$$

$$\theta' = M/D; \quad (1.207)$$

$$Q_*' = 0; \quad (1.208)$$

$$M' = \frac{Dk^2}{N} Q_* - Dk^2 \theta. \quad (1.209)$$

Из (1.208) получим

$$Q_* = Q_0. \quad (1.210)$$



После дифференцирования (1.207) и подстановки (1.209), (1.210) получим

$$\theta'' + k^2 \theta = \frac{k^2}{N} Q_0.$$

Тогда  $M$  и  $\theta$  можно представить в виде

$$\theta = M_0 \frac{1}{Dk} \sin kx + \theta_0 \cos kx + Q_0 \frac{1}{N} (1 - \cos kx); \quad (1.211)$$

$$M = -\theta_0 Dk \sin kx + Q_0 \frac{Dk}{N} \sin kx + M_0 \cos kx. \quad (1.212)$$

После подстановки выражения для  $\theta$  в уравнение (1.206) получим

$$w' = -\frac{Dk^2}{N} \left[ M_0 \frac{1}{Dk} \sin kx + \theta_0 \cos kx + Q_0 \frac{1}{N} (1 - \cos kx) \right] + \\ + \frac{Dk^2}{B_{xz}N} Q_0 = -M_0 \frac{k}{N} \sin kx - \theta_0 \frac{Dk^2}{N} \cos kx - Q_0 \frac{Dk^2}{N^2} \left( 1 - \frac{N}{B_{xz}} - \cos k \right).$$

Тогда после интегрирования выражение для  $w$  можно представить в виде

$$w = M_0 \frac{1}{N} \cos kx - \theta_0 \frac{Dk}{N} \sin kx - Q_0 \frac{Dk^2}{N^2} \left( \frac{N}{Dk^2} x - \frac{1}{k} \sin kx \right) + A.$$

Константу  $A$  определим из условия  $w(x=0) = w_0$ .  $A = w_0 - M_0/N$ . В окончательном виде получим

$$w = -\theta_0 \frac{Dk}{N} \sin kx + Q_0 \frac{Dk^2}{N^2} \left( \frac{1}{k} \sin kx - \frac{N}{Dk^2} x \right) - \\ - M_0 \frac{1}{N} (1 - \cos kx) + w_0. \quad (1.213)$$

Решения (1.210), (1.211)–(1.213) представим в матричном виде

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ Q_*(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{Dk}{N} \sin kx & \frac{Dk^2}{N^2} \left( \frac{1}{k} \sin kx - \frac{N}{Dk^2} x \right) & -\frac{1}{N} (1 - \cos kx) \\ 0 & \cos kx & \frac{1}{N} (1 - \cos kx) & \frac{1}{Dk} \sin kx \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Dk \sin kx & \frac{Dk}{N} \sin kx & \cos kx \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix}. \quad (1.214)$$

Для сжатого защемленного стержня граничные условия имеют вид

$$w(0) = w(l) = 0, \quad \theta(0) = \theta(l) = 0.$$

Тогда, воспользовавшись (1.214) и граничными условиями при  $x=0$ , запишем условия при  $x=l$

$$w(l) = Q_0 \frac{Dk^2}{N^2} \left( \frac{1}{k} \sin kl - \frac{Nl}{Dk^2} \right) - M_0 \frac{1}{N} (1 - \cos kl) = 0;$$

$$\theta(l) = Q_0 \frac{1}{N} (1 - \cos kl) + M_0 \frac{1}{Dk} \sin kl = 0.$$

Раскрыв и приравняв нулю определитель системы, после некоторых преобразований получим уравнение

$$\frac{4}{N^2} \sin \frac{kl}{2} \left( \sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} (1 - N/B_{xz}) \cos \frac{kl}{2} \right) = 0,$$

наименьший корень которого будет равен  $kl = 2\pi$ . Тогда, обозначив

$$N_9 = Dk^2 = \frac{4\pi^2 D}{l^2},$$

где

$$k^2 = \frac{N_{кр}}{D(1 - N_{кр}/B_{xz})},$$

получим

$$N_{кр} = \frac{N_9}{1 + N_9/B_{xz}} = \frac{4\pi^2 D}{l^2 \left( 1 + \frac{4\pi^2 D}{l^2 B_{xz}} \right)} \quad (1.215)$$

**Пример 1.8.** Исследование нелинейного безмоментного краевого эффекта в растянутой цилиндрической оболочке (рис. 1.11).

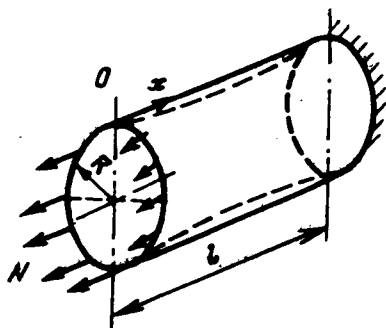


Рис. 1.11. Растяжение цилиндрической оболочки

Воспользуемся квадратичным представлением осесимметричных деформаций для цилиндрической оболочки

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= u' + \frac{1}{2} (w')^2; \\ e_2 &= w/R. \end{aligned} \right\} \quad (1.216)$$

Соотношения упругости запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= B_{11}e_1 + B_{12}e_2; \\ N_2 &= B_{12}e_1 + B_{22}e_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.217)$$

где  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$  — приведенные мембранные жесткости; характеристики,

$$B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 dz}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (1, 2); \quad B_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 \nu_{21} dz}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

Согласно принципу возможных перемещений запишем

$$\int_0^l (\delta_1 e N_1 + \delta_2 e N_2) dx + \delta u(0) \bar{N} = 0,$$

или с учетом (1.216)

$$\int_0^l \left[ (\delta u' + \delta w' w') N_1 + \frac{\delta w}{R} N_2 \right] dx + \delta u(0) \bar{N} = 0. \quad (1.218)$$

После выполнения в (1.218) операций интегрирования по частям получим

$$\int_0^l \left\{ \delta u (-N_1') + \delta w \left[ (-N_1 w')' + \frac{1}{R} N_2 \right] \right\} dx + \\ + \delta u(l) N_1(l) + \delta u(0) (\bar{N} - N_1(0)) + [\delta w N_1 w']_0^l = 0.$$

Отсюда следуют уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} N_1' &= 0; \\ \frac{1}{R} N_2 - (N_1 w')' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.219)$$

Граничные условия задачи будут

$$\begin{aligned} x=0 \quad N_1(0) &= \bar{N}; \quad w(0)=0; \\ x=l \quad u(l) &= 0; \quad w(l)=0. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Из (1.219) и (1.220) следует, что  $N_1 = \bar{N}$ . Воспользовавшись соотношениями упругости (1.217), представим

$$N_2 = B_{22} e_2 + B_{12} \left( \frac{N_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} e_2 \right).$$

где  $e_2 = w/R$ . Тогда второе уравнение в системе (1.219) можно представить в следующем виде [11]:

$$w'' - \alpha^2 w = f, \quad (1.221)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{B}{R^2 B_{11} \bar{N}}; \quad f = \frac{B_{12}}{R B_{11}}; \quad B = B_{11} B_{22} - B_{12}^2.$$

Решением (1.221) будет  $w = -f/\alpha^2 + A_1 e^{-\alpha x} + A_2 e^{\alpha x}$ . Для анализа краевого эффекта следует положить  $A_2 = 0$ ; а константу  $A_1$  определить из граничного условия  $w(0) = 0$ . Тогда форма прогиба  $w$  будет иметь следующий вид:

$$w = -\frac{f}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha x}) = -R \frac{\bar{N} B_{12}}{B} (1 - e^{-\alpha x}).$$

Длину зоны краевого эффекта  $l_*$  можно установить, считая достаточным затухание прогиба в  $e^\pi$  раз, тогда

$$l_* = \pi R \sqrt{\frac{B_{11} \bar{N}}{B}}.$$

Как видно из рис. 1.12 при увеличении растягивающей силы ( $\bar{N}_3 > \bar{N}_2 > \bar{N}_1$ ) не только возрастает значение прогиба  $w_{\max}$ , но и увеличивается длина зоны краевого эффекта.

Аналогичное (1.221) разрешающее уравнение можно получить на основе линеаризованной формулировки принципа возможных перемещений. Ограничимся одним шагом итерационного процесса построения решения и примем начальное состояние напряженным ( $\sigma_\tau \neq 0$ ) и недеформированным  $e_{m-1} = 0$ ;  $\sigma_{(m-1)} = 0$  (1.133). Тогда для рассматриваемого примера получим следующую формулировку задачи:

$$\int_0^l \left( \delta u' \left( B_{11} u' + B_{12} \frac{w}{R} \right) + \frac{\delta w}{R} \left( B_{12} u' + B_{22} \frac{w}{R} \right) + \delta w' w' \bar{N} \right) dx + \delta u(0) \bar{N} = 0.$$

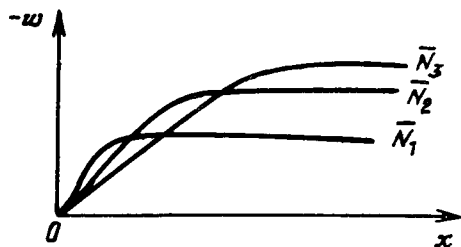


Рис. 1.12. Распределение прогибов в зонах краевых эффектов

Отсюда получим разрешающие уравнения

$$-\left( B_{11} u' + B_{12} \frac{w}{R} \right)' = 0; \quad (1.222)$$

$$\frac{1}{R} \left( B_{12} u' + B_{22} \frac{w}{R} \right) - \bar{N} w'' = 0. \quad (1.223)$$

и граничные условия:

$$x=0 \quad \bar{N} - B_{11} u'(0) - B_{12} \frac{w(0)}{R} = 0; \quad w(0) = 0;$$

$$x=l \quad u(l) = 0; \quad w(l) = 0.$$

тогда, используя решение уравнения (1.222)

$$B_{11} u' + B_{12} \frac{w}{R} = \bar{N},$$

уравнение (1.223) можно привести к виду уравнения (1.221).

**Пример 1.9.** Требуется дать приближенную оценку критической деформации тонкого ортотропного отслоения, имеющего форму эллиптической пластинки (рис. 1.13). Считать, что процесс нагружения осуществляется таким образом, что  $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = -\varepsilon$ . Жесткостная структура пластинки симметрична относительно срединной поверхности  $z=0$ .

Для определения критических деформаций отслоения воспользуемся энергетическим критерием в форме Брайана (см. (1.141)). Считая, что дополнительные перемещения соответствуют нормальному прогибу  $w$  тонкой

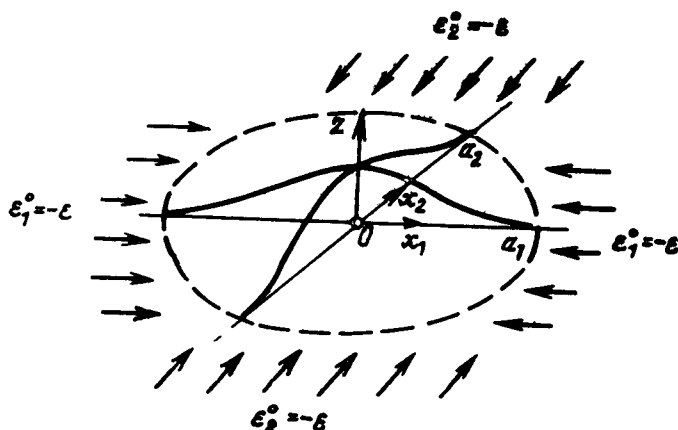


Рис. 1.13. Схема тонкого отслоения

пластинки, примем следующую модель деформирования

$$\epsilon_{1(z)} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \quad (1, 2); \quad \gamma_{12(z)} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Для нелинейных составляющих деформаций ограничимся квадратичным приближением

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \quad (1, 2).$$

С учетом сделанного в условиях задачи замечания об особенностях нагружения получим

$$N_1 = B_{11} \epsilon_1^0 + B_{12} \epsilon_2^0 = -(B_{11} + B_{12}) \epsilon \quad (1, 2),$$

где

$$B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} dz \quad (1, 2); \quad B_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} dz; \quad B_{21} = B_{12}.$$

Вариационную формулировку задачи согласно (1.141) можно представить в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \left( M_1 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} + M_2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1 \partial x_2} - (B_{11} + B_{12}) \epsilon \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} - (B_{22} + B_{12}) \epsilon \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0, \quad (1.224)$$

где

$$M_1 = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (1, 2); \quad M_{12} = 2D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$D_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 z^2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} dz \quad (1, 2); \quad D_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_1 \nu_{21} z^2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} dz; \quad D_{21} = D_{12};$$

$$D_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} G_{12} z^2 dz;$$

$\Omega$  — область эллиптической пластинки.

Будем считать, что граничные условия задачи соответствуют жесткому заземлению на контуре пластинки. Этим условиям удовлетворяет аппроксимация нормального прогиба  $w$  в виде

$$w = W(1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -4W(x_1 - x_1^3/a_1^2 - x_1x_2^2/a_2^2)/a_1^2 \quad (1, 2);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -4W(1 - 3x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)/a_1^2 \quad (1, 2);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 8Wx_1x_2/(a_1^2a_2^2).$$

Для выполнения операций интегрирования выражения (1.224) по эллиптической области воспользуемся формулами

$$\int_{\Omega} dx_1 dx_2 = \pi a_1 a_2; \quad \int_{\Omega} x_1^2 dx_1 dx_2 = 2\pi a_1^3 a_2 / 8;$$

$$\int_{\Omega} x_1^4 dx_1 dx_2 = 2\pi a_1^5 a_2 / 16; \quad \int_{\Omega} x_1^6 dx_1 dx_2 = 2\pi a_1^7 a_2 / 384;$$

$$\int_{\Omega} x_1^2 x_2^2 dx_1 dx_2 = 2\pi a_1^3 a_2^3 / 48; \quad \int_{\Omega} x_1^2 x_2^4 dx_1 dx_2 = 2\pi a_1^3 a_2^5 / 384 \quad (1, 2).$$

После интегрирования выражение (1.224) принимает вид

$$\delta W W 8\pi (D_{11}a_2/a_1^3 + D_{12}2/3a_1a_2 + D_{22}a_1/a_2^3 + D_{33}4/3a_1a_2 = \\ = \delta W W 8\pi ((B_{11} + B_{12})\varepsilon_{a_2}/a_1 + (B_{22} + B_{12})\varepsilon_{a_1}/a_2)/12.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon_{кр} = \frac{12(D_{11}a_2^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})a_1^2a_2^2/3 + D_{22}a_1^4)}{a_1^2a_2^2((B_{11} + B_{12})a_2^2 + (B_{22} + B_{12})a_1^2)}.$$

В частном случае для изотропного материала будем иметь

$$\varepsilon_{кр} = \frac{h^2(a_1^4 + a_2^4 + 2a_1^2a_2^2/3)}{a_1^2a_2^2(a_1^2 + a_2^2)(1 + \nu)},$$

при  $a_1 = a_2 = a$   $\varepsilon_{кр} = \frac{1,333}{1 + \nu} \left(\frac{h}{a}\right)^2$ , точное решение [1] дает

$$\varepsilon_{кр} = \frac{1,233}{1 + \nu} \left(\frac{h}{a}\right)^2.$$

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

В этом разделе представлены основные уравнения и соотношения, которые используются в расчетах многослойных конструкций. На основе вариационных методов с использованием деформационных соотношений получены уравнения равновесия, дан анализ геометрических характеристик поверхностей и соотношений упругости анизотропного тела. Рассмотрены различные случаи упругой симметрии, показаны преобразования коэффициентов

упругости при поворотах системы координат, выделены средние коэффициенты упругости (инварианты) и характеристики анизотропии.

Особое внимание уделено получению основных уравнений, соотношений и вариационных формулировок задач статики и термоупругости многослойных оболочек с использованием варианта теории, учитывающего деформации поперечных сдвигов. В качестве кинематических гипотез выступают предположения о несжимаемости стенки оболочки в поперечном направлении и линейном распределении по толщине многослойного пакета касательных перемещений. Распределения касательных поперечных напряжений выбираются в наиболее простом виде независимо от кинематических гипотез. Приведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной осуществляется с использованием смешанной вариационной формулировки. Все преобразования выполнены с учетом переменности метрики по толщине оболочки. Показана идентичность полученных уравнений равновесия с интегральными уравнениями трехмерной теории упругости.

В качестве примеров даются простые подпрограммы вычисления основных геометрических характеристик оболочек вращения; определения приведенных жесткостных характеристик и температурных составляющих погонных усилий и моментов многослойного пакета.

## 2.1. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 2.1.1. Поверхность общего вида

В качестве координатной поверхности многослойной оболочки, как правило, выбирается либо срединная поверхность одного из слоев, либо поверхность сопряжения слоев. Рассмотрим основные геометрические характеристики координатной поверхности. Гладкую поверхность общего вида зададим в параметрической форме [37]

$$x_i = X_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — координаты точки поверхности в декартовой системе координат;  $\alpha_1, \alpha_2$  — параметры;  $X_i(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $i=1, 2, 3$ ) — заданные функции аргументов  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Положение точки на поверхности определим радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , который в декартовой системе координат будет иметь компоненты  $\mathbf{R} = [X_1, X_2, X_3]^T$ . Здесь и в дальнейшем под матричной записью  $\mathbf{R}$  понимается вектор-столбец, компоненты которого представляют проекции на оси  $ox_1, ox_2, ox_3$  выбранной декартовой системы координат.

Рассмотрим векторы, касательные к линиям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , т. е. к линиям, соответствующим значениям  $\alpha_2 = \text{const}$  и  $\alpha_1 = \text{const}$ :

$$\mathbf{R}_{,1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathbf{R}, \quad (1, 2).$$

В декартовой системе координат компоненты вектора  $\mathbf{R}_{,i}$  ( $i=1, 2$ ) будут равны

$$\mathbf{R}_{,i} = [X_{1,i}, X_{2,i}, X_{3,i}]^T, \quad (i=1, 2), \quad (2.2)$$

где нижним индексом после запятой отмечен параметр, по которому выполнена операция частного дифференцирования. Модули касательных векторов  $R_{,1}$ ,  $R_{,2}$  называют параметрами Ламе  $A_1$ ,  $A_2$ :

$$A_1 = \sqrt{R_{,1}^T R_{,1}} \quad (1, 2). \quad (2.3)$$

Рассмотрим приращение вектора  $R$  при переходе от точки поверхности с параметрами  $(\alpha_1, \alpha_2)$  в точку с параметрами  $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$ . Линейная часть этого приращения, или первый дифференциал, обозначается  $dR$  и определяется следующим образом:

$$dR = R_{,1} d\alpha_1 + R_{,2} d\alpha_2. \quad (2.4)$$

Модуль вектора  $dR$  представляет длину элементарной дуги между точками  $(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$

$$dl = \sqrt{dR^T dR}. \quad (2.5)$$

Стоящая в подкоренном выражении (2.5) величина  $dR^T dR$  называется первой квадратичной формой поверхности. С учетом (2.4) ее можно записать в виде

$$dl^2 = R_{,1}^T R_{,1} d\alpha_1^2 + 2R_{,1}^T R_{,2} d\alpha_1 d\alpha_2 + R_{,2}^T R_{,2} d\alpha_2^2.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы можно определить через параметры Ламе и угол  $\chi$  между касательными векторами:

$$R_{,1}^T R_{,1} = A_1^2 \quad (1, 2); \quad R_{,1}^T R_{,2} = A_1 A_2 \cos \chi. \quad (2.6)$$

В случае, когда  $\cos \chi = 0$ ,  $\alpha_1$ - и  $\alpha_2$ -линии ортогональны.

Введем в рассмотрение единичный вектор нормали к поверхности, который определяется векторным произведением

$$N = \frac{1}{A_1 A_2 \sin \chi} R_{,1} \times R_{,2}.$$

Для вычисления компонент вектора  $N$  в декартовой системе координат воспользуемся правилом векторного произведения и запишем

$$N = \frac{1}{A_1 A_2 \sin \chi} [N_1, N_2, N_3]^T, \quad (2.7)$$

где

$$N_1 = \det \begin{bmatrix} X_{2,1} & X_{2,2} \\ X_{3,1} & X_{3,2} \end{bmatrix}, \quad (1, 2, 3)$$

Здесь круговой перестановке  $(1, 2, 3)$  подлежат только индексы, стоящие до запятой, а  $X_{i,1}(1, 2)$  ( $i=1, 2, 3$ ) — компоненты касательных векторов в декартовой системе координат (2.2). Тройку единичных векторов  $\frac{1}{A_1} R_{,1}$ ;  $\frac{1}{A_2} R_{,2}$ ;  $N$  называют основными векторами поверхности, или основным триедром.



Рассмотрим векторы вторых производных от радиус-вектора  $R$ . В декартовой системе координат эти векторы будут иметь компоненты

$$R_{,ij} = [X_{1,ij}, X_{2,ij}, X_{3,ij}]^T, \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.8)$$

С помощью векторов  $R_{,ij}$  можно определить приращение радиус-вектора при переходе от точки  $(\alpha_1, \alpha_2)$  к точке  $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$  с точностью до величин второго порядка малости

$$\Delta R = R_{,1} d\alpha_1 + R_{,2} d\alpha_2 + \\ + \frac{1}{2} (R_{,11} d\alpha_1^2 + 2R_{,12} d\alpha_1 d\alpha_2 + R_{,22} d\alpha_2^2)$$

и вычислить проекцию этого вектора на нормаль к поверхности. Поскольку векторы  $R_{,i}$  перпендикулярны вектору  $N$ , то

$$N^T \Delta R = \frac{1}{2} (L_{11} d\alpha_1^2 + 2L_{12} d\alpha_1 d\alpha_2 + L_{22} d\alpha_2^2),$$

где

$$L_{11} = N^T R_{,11} \quad (1, 2); \quad L_{12} = N^T R_{,12}. \quad (2.9)$$

Коэффициенты  $L_{ij}$  называют коэффициентами второй квадратичной формы.

С помощью коэффициентов первой ( $A_i$ ) и второй ( $L_{ij}$ ) квадратичных форм определяются кривизны нормальных сечений, проходящих через линии  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  [37],

$$k_{11} = -L_{11}/A_1^2, \quad (1, 2); \quad k_{12} = L_{12}/A_1 A_2.$$

Координатные линии на поверхности, для которых касательные векторы  $R_{,i}$  ортогональны и коэффициент  $L_{12}$  второй квадратичной формы равен нулю, называют линиями кривизны. В этом случае кривизны обозначают  $k_1 = k_{11}$ ,  $k_2 = k_{22}$  и называют главными кривизнами

$$k_1 = -L_{11}/A_1^2, \quad (1, 2) \quad (L_{12} = 0). \quad (2.10)$$

В дальнейшем при получении основных соотношений, определяющих кинематику деформирования оболочек, будем пользоваться векторами, заданными своими проекциями на оси основного триедра. В качестве системы координатных линий  $\alpha_1, \alpha_2$  будем выбирать линии кривизны. Чтобы отметить тот факт, что вектор  $f$  задан проекциями на оси основного триедра, будем этот вектор обозначать строчными буквами. Для точки поверхности касательные векторы  $R_{,1}, R_{,2}$ , заданные проекциями на основной триедр, начало координат которого совмещено с точкой, обозначим  $r_{,1}, r_{,2}$ , компонентами этих векторов будут выступать

$$r_{,1} = [A_1, 0, 0]^T; \quad r_{,2} = [0, A_2, 0]^T. \quad (2.11)$$

Для единичного вектора нормали  $n = [0, 0, 1]^T$ .

При дифференцировании по  $\alpha_i$  вектора  $\mathbf{f}$ , заданного проекциями на оси основного триедра, воспользуемся следующим правилом [37]:

$$\mathbf{f}_{,i} = \mathbf{f}_{,i} + \Gamma_i \mathbf{f}, \quad (i = 1, 2), \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{f}_{,i} = [f_{1,i}, f_{2,i}, f_{3,i}]^T, \quad (i = 1, 2);$$

$$f_{k,i} = \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_i}, \quad (k = 1, 2, 3; i = 1, 2);$$

$$\Gamma_1 = A_1 \begin{bmatrix} 0 & \Phi_{12} & k_1 \\ -\Phi_{12} & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Gamma_2 = A_2 \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_{21} & 0 \\ \Phi_{21} & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (1, 2) \quad (2.13)$$

Векторы  $\mathbf{f}_{,i}$  называют векторами локальных производных, матрицы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  характеризуют вращение основного триедра при движении вдоль  $\alpha_1, \alpha_2$  линий.

Коэффициенты  $A_i$  (2,3),  $k_i$  (2,10) и  $\Phi_{ij}$  (2.13) определяют основные геометрические характеристики поверхности.

### 2.1.2. Поверхность вращения

В связи с тем, что оболочки вращения имеют весьма широкое приложение, имеет смысл более детально рассмотреть основные геометрические характеристики поверхностей таких тел. Кроме того, это послужит нагляд-

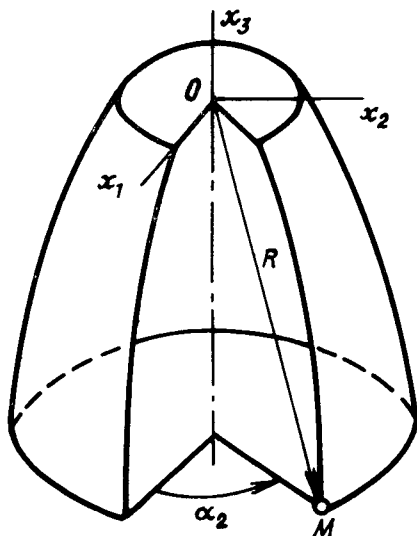


Рис. 2.1

Рис. 2.1. Поверхность вращения

ной иллюстрацией практического применения полученных выше общих соотношений.

Для поверхности вращения (рис. 2.1) в качестве параметра  $\alpha_2$  удобно принять угол, определяющий положение меридиана. За параметр  $\alpha_1$  обычно принимают одну из величин  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $s$  (рис. 2.2), где  $t$  — координата вдоль оси вращения;  $r$  — радиус параллели;  $\theta$  — угол между осью вращения и нормалью  $N$ ;  $s$  — расстояние по дуге меридиана. При этом считается, что радиус параллели  $r$  и координата  $t$  однозначно определяются заданными функциями аргумента  $\alpha_1$ .

Для точки  $M$ , принадлежащей поверхности вращения, радиус-вектор  $R$  можно охарактеризовать вектор-столбцом, компоненты которого представляют координаты точки (см. рис. 2.1),

$$R = [r \cos \alpha_2, r \sin \alpha_2, t]^T, \quad (2.14)$$

где

$$r = r(\alpha_1); \quad t = t(\alpha_1).$$

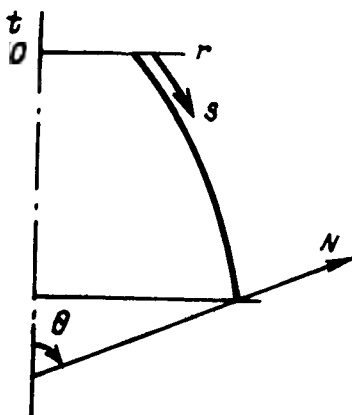


Рис. 2.2. К определению параметров поверхности вращения

Векторы, касательные к линиям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , согласно (2.2) и (2.14) будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= [r' \cos \alpha_2, r' \sin \alpha_2, t']^T; \\ R_{2,2} &= [-r \sin \alpha_2, r \cos \alpha_2, 0]^T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $(\cdot)' = \frac{d}{d\alpha_1}(\cdot)$ . Параметрами Ламе для поверхности вращения (2.3), (2.15) будут коэффициенты

$$A_1 = \sqrt{(r')^2 + (t')^2}; \quad A_2 = r. \quad (2.16)$$

Из (2.2) и (2.15) следует, что

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= r' \cos \alpha_2; \quad X_{2,1} = r' \sin \alpha_2; \quad X_{3,1} = t'; \\ X_{1,2} &= -r \sin \alpha_2; \quad X_{2,2} = r \cos \alpha_2; \quad X_{3,2} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Скалярное произведение  $R_{1,1}^T R_{2,2}$  (2.6) и (2.17) будет равно нулю для любой точки, поэтому можно сделать вывод, что выбранные линии  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ортогональны для поверхности вращения.

Вычисление компонент вектора нормали  $N$  ((2.7), (2.17)) дает следующий результат:

$$N = \frac{1}{A_1} [-t' \cos \alpha_2, -t' \sin \alpha_2, r']^T. \quad (2.18)$$

Векторы вторых производных от  $R$  (2.8) для поверхности вращения будут иметь компоненты

$$\begin{aligned} R_{,11} &= [r'' \cos \alpha_2, r'' \sin \alpha_2, t']^T; \\ R_{,22} &= [-r \cos \alpha_2, -r \sin \alpha_2, 0]^T; \\ R_{,12} &= [-r' \sin \alpha_2, r' \cos \alpha_2, 0]^T. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы  $L_{ij}$ , вычисленные согласно (2.9) при  $N$  (2.18) и  $R_{,ij}$  (2.19), принимают значения

$$L_{11} = \frac{1}{A_1} (-t' r'' + r' t''); \quad L_{22} = \frac{1}{A_1} (t' r); \quad L_{12} = 0. \quad (2.20)$$

Поскольку  $L_{12} = 0$ , то можно заключить, что выбранные ортогональные линии  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для поверхности вращения являются линиями кривизны. Значения главных кривизн для поверхности вращения (2.10), (2.20) будут определяться следующими зависимостями:

$$k_1 = \frac{1}{A_1^3} (t' r'' - r' t''); \quad k_2 = -\frac{1}{A_1 A_2} t'. \quad (2.21)$$

Коэффициенты  $\Phi_{ij}$  (2.13) при  $A_i$  (2.16) принимают следующий вид:

$$\Phi_{12} = 0; \quad \Phi_{21} = \frac{1}{A_1 A_2} r'. \quad (2.22)$$

Полученные зависимости (2.16), (2.21), (2.22) определяют основные геометрические характеристики поверхности вращения. Рассмотрим два частных случая формы меридиана.

Конус (рис. 2.3) имеет следующие параметры:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s; \quad A_1 = 1; \quad A_2 = r_0 + \alpha_1 \cos \theta_0; \\ k_1 &= 0; \quad k_2 = \frac{\sin \theta_0}{A_2}; \quad \Phi_{21} = \frac{\cos \theta_0}{A_2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

При  $\theta_0 = \pi/2$  будем иметь цилиндр, при  $\theta_0 = 0$  — круглую пластину.

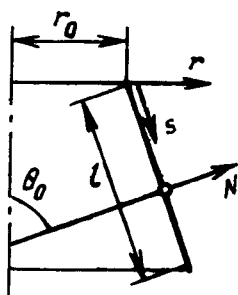


Рис. 2.3. Геометрические характеристики конуса

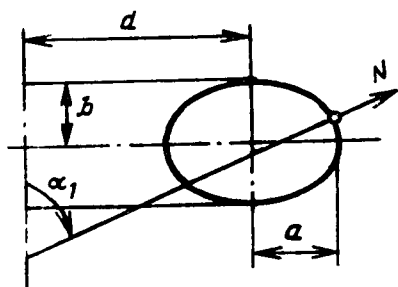


Рис. 2.4. Геометрические характеристики эллиптического тора

Эллиптический тор (рис. 2.4):

$$A_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}; \quad A_2 = d + \frac{a^2 \sin \alpha_1}{c}$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1}; \quad k_2 = \frac{\sin \alpha_1}{A_2}; \quad \varphi_{21} = \frac{\cos \alpha_1}{A_2}; \quad (2.24)$$

$$c = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1}.$$

При  $d=0$ ;  $a \neq b$  получим эллипсоид вращения, при  $d=0$ ;  $a=b$  — сферу.

Описание некоторых других частных случаев параметрического задания форм меридиана можно найти в [2, 21].

## 2.2. СВЯЗЬ ДЕФОРМАЦИЙ С ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ

Получим общие соотношения, связывающие деформации оболочки с перемещениями. При этом воспользуемся ортогональной криволинейной системой координат (рис. 2.5). Будем

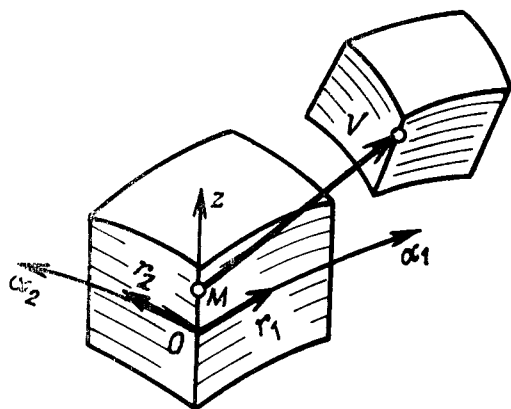


Рис. 2.5. Перемещение оболочки при деформировании

считать, что линии  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  совпадают с линиями кривизны координатной поверхности  $z=0$ ; ось  $Oz$  является прямой, и ее направление совпадает с направлением вектора нормали  $n$ . Положение точки, принадлежащей оболочке, определим тремя координатами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $z$ . Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что точка отстоит на расстояние  $z$  от координатной поверхности, радиус-вектор точки обозначим  $r_{(z)}$ . Поместим основной триедр на координатной поверхности так, чтобы ось  $Oz$  (рис. 2.5) проходила через точку  $M$ . Касательные векторы к поверхности  $z$ -го слоя определим частными производными

$$r_{(z),i} = r_{,i} + z n_{,i}, \quad (i=1, 2), \quad (2.25)$$

где компоненты векторов  $\mathbf{r}_i$  определены выражениями (2.11). Для вычисления векторов  $\mathbf{n}_i$  воспользуемся правилом дифференцирования (2.12) и получим

$$\mathbf{n}_{1,1}=[A_1 k_1, 0, 0]^T; \mathbf{n}_{1,2}=[0, A_2 k_2, 0]^T.$$

Тогда компоненты касательных векторов в точке  $z$ -го слоя будут равны

$$\mathbf{r}_{(z),1}=[H_1, 0, 0]^T, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{r}_{(z),2}=[0, H_2, 0]^T,$$

где

$$H_i=A_i(1+k_1 z), \quad (i=1, 2). \quad (2.27)$$

— коэффициенты Ламе для  $z$ -го слоя.

Вектор, касательный к координате  $z$ , совпадает с нормалью, поэтому

$$\mathbf{r}_{(z),3}=\mathbf{n}=[0, 0, 1]^T \quad (2.28)$$

здесь и в дальнейшем индекс 3 будет соответствовать координате  $z$ ;  $(\cdot)_{,3}=\frac{\partial}{\partial z}(\cdot)$ . Параметр Ламе  $H_3=1$ .

Пусть в результате внешнего воздействия оболочка деформировалась. Рассматриваемая точка  $M$  (см. рис. 2.5) получила перемещение  $\mathbf{v}$ . Вектор  $\mathbf{v}$  будем задавать компонентами  $v_1, v_2, v_3$ , которые представляют проекции перемещения на оси основного триедра исходной координатной поверхности. Для того чтобы охарактеризовать изменение метрических характеристик деформированной оболочки, предварительно вычислим компоненты касательных векторов

$$\mathbf{r}_{(z),i}^*=\mathbf{r}_{(z),i}+\mathbf{v}_{,i}, \quad (2.29)$$

где  $\mathbf{r}_{(z),i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) определяются выражениями (2.26) ... (2.28), а векторы частных производных от вектора перемещений вычисляются с учетом (2.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,1} &= A_1 \left[ \left( \frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right), \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{A_1} v_{2,1} - \Phi_{12} v_1 \right), \left( \frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) \right]^T; \\ \mathbf{v}_{,2} &= A_2 \left[ \left( \frac{1}{A_2} v_{1,2} - \Phi_{21} v_2 \right), \left( \frac{1}{A_2} v_{2,2} + \Phi_{21} v_1 + k_2 v_3 \right), \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{A_2} v_{3,2} - k_2 v_2 \right) \right]^T; \\ \mathbf{v}_{,3} &= [v_{1,3}, v_{2,3}, v_{3,3}]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Длина элементарного отрезка  $z$ -го слоя, ориентированного вдоль  $\alpha_i$ -линии, до деформации составляла

$$dl_i = d\alpha_i \sqrt{\mathbf{r}_{(z),i}^T \mathbf{r}_{(z),i}} = H_i d\alpha_i, \quad (i=1, 2, 3).$$

После деформирования длина отрезка будет равна

$$dl_i^* = d\alpha_i \sqrt{\mathbf{r}_{(z),i}^{*T} \mathbf{r}_{(z),i}^*} = H_i^* d\alpha_i, \quad (i=1, 2, 3),$$

где

$$H_i^* = \sqrt{\mathbf{r}_{(z),i}^{*T} \mathbf{r}_{(z),i}^*}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.31)$$

— коэффициент Ламе деформированной поверхности. Относительное удлинение элементарного отрезка определим так:

$$e_i = \frac{dl_i^* - dl_i}{dl_i} \quad \text{или} \quad e_i = \frac{H_i^*}{H_i} - 1, \quad (i=1, 2, 3). \quad (2.32)$$

Поскольку согласно (2.31) и (2.29) параметр Ламе  $H_i^*$  равен

$$H_i^* = H_i \sqrt{1 + \frac{2}{H_i^2} \mathbf{r}_{(z),i}^T \mathbf{v}_{,i} + \frac{1}{H_i^2} \mathbf{v}_{,i}^T \mathbf{v}_{,i}}, \quad (i=1, 2, 3),$$

а для малых деформаций

$$H_i^* = H_i \left( 1 + \frac{1}{H_i^2} \mathbf{r}_{(z),i}^T \mathbf{v}_{,i} + \frac{1}{2H_i^2} \mathbf{v}_{,i}^T \mathbf{v}_{,i} \right), \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.33)$$

то относительное удлинение элементарного отрезка (2.32) будет равно

$$e_i = \frac{1}{H_i^2} \left( \mathbf{r}_{(z),i}^T \mathbf{v}_{,i} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{,i}^T \mathbf{v}_{,i} \right), \quad (i=1, 2, 3). \quad (2.34)$$

Сдвиговые деформации  $e_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3, i \neq j$ ) определим как изменения в результате деформирования углов между векторами  $\mathbf{r}_{(z),i}$  и  $\mathbf{r}_{(z),j}$ . Для малых сдвиговых деформаций  $\cos(\pi/2 - e_{ij}) = \sin e_{ij} \approx e_{ij}$ . Косинус угла  $(\pi/2 - e_{ij})$  определяется скалярным произведением единичных векторов  $\mathbf{r}_{(z),i}^*/H_i^*$  и  $\mathbf{r}_{(z),j}^*/H_j^*$ . Тогда для малых деформаций с учетом (2.29) получим

$$e_{ij} = \frac{1}{H_i H_j} \left( \mathbf{r}_{(z),i}^T \mathbf{v}_{,j} + \mathbf{r}_{(z),j}^T \mathbf{v}_{,i} + \mathbf{v}_{,i}^T \mathbf{v}_{,j} \right), \quad (i, j=1, 2, 3; i \neq j). \quad (2.35)$$

Воспользуемся выражениями для касательных векторов (2.26), (2.28), векторов частных производных от вектора перемещений (2.30), вычислим скалярные произведения, указанные в выражениях (2.34), (2.35), и представим полные деформации  $\epsilon$  в виде линейных  $\epsilon$  и нелинейных  $\eta$  составляющих. Для получения более компактных выражений введем дополнитель-

ные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}(z) &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right), (1, 2); \\ \varepsilon_{12}(z) &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{2,1} - \Phi_{12} v_1 \right), (1, 2); \\ \varepsilon_{13}(z) &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right), (1, 2); \\ \varepsilon_{3i}(z) &= v_{i,3} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Тогда с использованием обозначений (2.36) линейные составляющие деформации  $\varepsilon$  будут определяться так:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{1(z)}, \varepsilon_{2(z)}, \varepsilon_{3(z)}, \gamma_{12(z)}, \gamma_{23(z)}, \gamma_{31(z)}]^T,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \varepsilon_{11}(z), (1, 2, 3); \\ \gamma_{12(z)} &= \varepsilon_{12}(z) + \varepsilon_{21}(z), \\ \gamma_{31(z)} &= \varepsilon_{13}(z) + \varepsilon_{31}(z), (1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Для нелинейных составляющих деформаций  $\eta$  получим

$$\begin{aligned} \eta &= [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_{12}, \eta_{23}, \eta_{31}]^T; \\ \eta_1 &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2(z) + \varepsilon_{12}^2(z) + \varepsilon_{13}^2(z)), (1, 2, 3); \\ \eta_{12} &= \varepsilon_{11}(z)\varepsilon_{21}(z) + \varepsilon_{12}(z)\varepsilon_{22}(z) + \varepsilon_{13}(z)\varepsilon_{23}(z); \\ \eta_{31} &= \varepsilon_{31}(z)\varepsilon_{11}(z) + \varepsilon_{32}(z)\varepsilon_{12}(z) + \varepsilon_{33}(z)\varepsilon_{13}(z), (1, 2). \end{aligned}$$

Тогда

$$e = \varepsilon + \eta \quad (2.38)$$

будет определять в квадратичном приближении относительные удлинения и углы сдвигов, записанные в криволинейной ортогональной системе координат.

В развернутом виде компоненты линейных деформаций (2.37) выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right), (1, 2); \\ \gamma_{12(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{2,1} - \Phi_{12} v_1 \right) + \frac{A_2}{H_2} \left( \frac{1}{A_2} v_{1,2} - \Phi_{21} v_2 \right); \\ \gamma_{31(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right) + v_{1,3}, (1, 2); \\ \varepsilon_{3(z)} &= v_{3,3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$



Более часто в литературе встречается иное, чем (2.39), написание выражений для линейных составляющих деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \frac{1}{H_1} v_{1,1} + \frac{1}{H_1 H_2} H_{1,2} v_2 + \frac{1}{H_1 H_3} H_{1,3} v_3 \quad (1, 2, 3); \\ \gamma_{12(z)} &= \frac{H_1}{H_2} \left( \frac{v_1}{H_1} \right)_{,2} + \frac{H_2}{H_1} \left( \frac{v_2}{H_1} \right)_{,1} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

В эквивалентности (2.39) и (2.40) нетрудно убедиться, если воспользоваться уравнениями Кодацци—Гаусса [11]

$$(A_1 k_1)_{,2} = k_2 A_{1,2}; \quad (1, 2)$$

и показать, что

$$\frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} = \frac{1}{H_1 H_2} H_{1,2} \quad (1, 2), \quad (2.41)$$

где коэффициенты  $\varphi_{12}$  определяются согласно (2.13).

### 2.3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Получим уравнения равновесия для трехмерного тела в ортогональной системе криволинейных координат. На рис. 2.6 условно показан элемент тела, выделенный сечениями  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2, z, z + dz$ , и его напряженное состояние. Из уравнений моментов относительно касательных к координатным осям следует свойство парности касательных напряжений

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad (1, 2, 3). \quad (2.42)$$

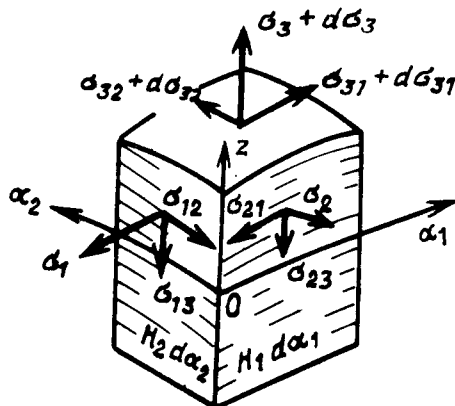


Рис. 2.6. Иллюстрация общего случая напряженного состояния

Линейные уравнения равновесия, соответствующие суммам проекций сил на касательные к осям координат, получим вариационным способом. Для этого воспользуемся принципом воз-

возможных перемещений (1.5)

$$\iiint_V (\delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{v}^T \mathbf{g}) H_1 H_2 dz d\alpha_2 d\alpha_1 = \iint_{S_p} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} dS, \quad (2.43)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T$ ;

$\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]^T$ ;  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ ;  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$ ;  $g_i$  — объемные силы;  $p_i$  — проекции поверхностных сил на оси  $\alpha_i$ .

Воспользовавшись выражениями (2.39), выразим деформации через перемещения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{v}, \quad (2.44)$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & \frac{A_1 k_1}{H_1} \\ \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{A_2 k_2}{H_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} & 0 \\ 0 & -\frac{A_2 k_2}{H_2} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ -\frac{A_1 k_1}{H_1} + \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix}.$$

С учетом линейности связи деформаций с перемещениями (2.44) для возможных деформаций  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  получим  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{v}$ , тогда формулировка принципа возможных перемещений (2.43) примет следующий вид:

$$\iiint_V ((\mathbf{L} \delta \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{v}^T \mathbf{g}) H_1 H_2 dz d\alpha_2 d\alpha_1 = \iint_{S_p} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} dS. \quad (2.45)$$

Воспользовавшись формулами Остроградского, (2.45) можно преобразовать

$$\begin{aligned} & \iiint_V \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{L}^* \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{g}) H_1 H_2 dz d\alpha_2 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{S_p} \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{L}^v \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p}) dS = 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где матрица сопряженных дифференциальных операторов  $\mathbf{L}^*$  и матрица направляющих косинусов  $\mathbf{L}^v$  получаются по матрице  $\mathbf{L}$  путем ее транспонирования и следующей замены коэффициентов (табл. I), где  $l_i$  — косинус угла между вектором, касательным к  $\alpha_i$  линии, и вектором внешней нормали  $\mathbf{v}$ .

## Преобразование коэффициентов

| Коэффициенты матрицы                                   |                                                                                    |                                 |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $L$ , номер элемента $(i, j)$                          | $L^*$ , номер элемента $(j, i)$                                                    | $L^V$ , номер элемента $(j, i)$ |
| $\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}$     | $-\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21}$ | $l_1$                           |
| $\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}$     | $-\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1}{H_1} \varphi_{12}$ | $l_2$                           |
| $\frac{\partial}{\partial z}$                          | $-\frac{\partial}{\partial z} - \frac{A_1 k_1}{H_1} - \frac{A_2 k_2}{H_2}$         | $l_3$                           |
| Коэффициент, не содержащий дифференциального оператора | Без изменений                                                                      | 0                               |

Из уравнения (2.46) следуют уравнения равновесия:

$$L^* \sigma - g = 0 \text{ в } V, \quad (2.47)$$

где

$$L^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} & 0 & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & 0 & -2 \frac{A_1 k_1}{H_1} - \frac{A_2 k_2}{H_2} \\ -\frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} & -2 \frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & -\frac{\partial}{\partial z} & & \\ \frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & 0 & -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & -2 \frac{A_2 k_2}{H_2} - \frac{A_1 k_1}{H_1} \\ -\frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & -2 \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} & -\frac{\partial}{\partial z} & & 0 \\ \frac{A_1 k_1}{H_1} & \frac{A_2 k_2}{H_2} & -\frac{A_1 k_1}{H_1} - \frac{A_2 k_2}{H_2} & 0 & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial z \alpha_2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ & -\frac{\partial}{\partial z} & & -\frac{A_1}{H_1} \varphi_{12} & -\frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} \end{bmatrix}$$

В развернутом виде уравнения равновесия (2.47) запишем с учетом (2.41) и того, что

$$\frac{1}{H_1} \Phi_{,1} + \frac{A_2}{H_2} \varphi_{21} \Phi = \frac{1}{H_1 H_2} (H_2 \Phi)_{,1} \quad (1, 2);$$

$$\Phi_{,3} + \frac{A_1 k_1 \Phi}{H_1} = \frac{1}{H_1 H_2} (\Phi H_1 H_2)_{,3}; \quad A_1 k_1 = H_{1,3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (H_2\sigma_1)_{,1} - H_{2,1}\sigma_2 + (H_1\sigma_{12})_{,2} + H_{1,2}\sigma_{12} + (H_1H_2\sigma_{31})_{,3} + \\ & + H_2H_{1,3}\sigma_{31} + g_1H_1H_2 = 0 \quad (1, 2); \\ & -H_2H_{1,3}\sigma_1 - H_1H_{2,3}\sigma_2 + (H_1H_2\sigma_3)_{,3} + (H_1\sigma_{23})_{,2} + (H_2\sigma_{31})_{,1} = \\ & = g_3H_1H_2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Как следует из (2.46), силовые граничные условия на  $S_p$  будут записываться в виде

$$L^*\sigma - p = 0 \text{ на } S_p, \quad (2.49)$$

где

$$L^* = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & l_2 & 0 & l_3 \\ 0 & l_2 & 0 & l_1 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 & l_2 & l_1 \end{bmatrix},$$

или в развернутом виде

$$l_1\sigma_1 + l_2\sigma_{12} + l_3\sigma_{31} = p_1, \quad (1, 2, 3).$$

В уравнениях равновесия (2.48) можно заметить, что

$$\begin{aligned} & (H_1H_2\sigma_{31})_{,3} + H_2H_{1,3}\sigma_{31} = \frac{1}{H_1} (H_1^2H_2\sigma_{31})_{,3}, \quad (1, 2); \\ & (H_1\sigma_{12})_{,2} + H_{1,2}\sigma_{12} = \frac{1}{H_1} (H_1^2\sigma_{12})_{,2}, \quad (1, 2). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Соотношения (2.50) позволяют получить из (2.48) интегральные по толщине уравнения равновесия [11]

$$\begin{aligned} & (A_2N_1)_{,1} - A_{2,1}N_2 + (A_1N_{21})_{,2} + A_{1,2}N_{12} + k_1A_1A_2Q_1 + \\ & + F_1 = 0, \quad (1, 2); \\ & (A_2Q_1)_{,1} + (A_1Q_2)_{,2} - A_1A_2(k_1N_1 + k_2N_2) + F_3 = 0; \\ & (A_2M_1)_{,1} - A_{2,1}M_2 + (A_1M_{21})_{,2} + A_{1,2}M_{12} - \\ & - A_1A_2Q_1 + m_1 = 0, \quad (1, 2), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_1 H_2 dz \quad (1, 2); \quad N_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_{12} z H_2 dz, \quad (1, 2); \\ M_1 &= \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_1 z H_2 dz, \quad (1, 2); \quad M_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_{12} z H_2 dz, \quad (1, 2); \\ Q_1 &= \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_{31} H_2 dz, \quad (1, 2); \end{aligned} \quad (2.52)$$

$e, s$  — расстояние вдоль координаты  $z$  от координатной поверхности до внутренней и внешней поверхностей оболочек;

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} F_1 &= \int_{-e}^s g_1 H_1 H_2 dz + H_{1l} H_{2l} p_{1l} + H_{1s} H_{2s} p_{1s} \quad (1, 2, 3), \\ \frac{1}{A_1 A_2} m_1 &= \int_{-e}^s z g_1 H_1 H_2 dz + H_{1s} H_{2s} s p_{1s} - \\ &- H_{1l} H_{2l} p_{1l} \quad (1, 2, 3); \\ H_{1l} &= A_1 (1 + k_1 l); \quad H_{1s} = A_1 (1 + k_1 s), \quad (1, 2); \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

— приведенные распределенные поверхностные силы. При получении (2.53) считалось, что на поверхностях  $z = -e$  и  $z = s$  имеются следующие силовые условия:

$$\begin{aligned} z = -l \quad \sigma_{31} &= -p_{1l}; \quad \sigma_3 = -p_{3l}; \\ z = s \quad \sigma_{31} &= p_{1s}; \quad \sigma_3 = p_{3s}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Интегральные по толщине уравнения равновесия (2.51) справедливы для любых гипотез деформирования. Шестое уравнение равновесия, соответствующее сумме моментов относительно оси  $z$ ,

$$N_{21} - N_{12} + k_2 M_{21} + k_1 M_{12} = 0$$

выполняется (с учетом выражений для силовых факторов (2.52)) автоматически. В разделе 2.5.3. уравнения (2.51) будут получены вариационным путем.

## 2.4. СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ

### 2.4.1. Общий случай анизотропии

Для упругого тела можно ввести понятие удельной потенциальной энергии деформации  $U_0$ , являющейся функцией деформаций и обладающей тем свойством, что

$$\sigma = \frac{\partial U_0}{\partial e}, \quad (2.55)$$

где

$$\frac{\partial U_0}{\partial e} = \left[ \frac{\partial U_0}{\partial e_1}, \frac{\partial U_0}{\partial e_2}, \frac{\partial U_0}{\partial e_3}, \frac{\partial U_0}{\partial e_{12}}, \frac{\partial U_0}{\partial e_{23}}, \frac{\partial U_0}{\partial e_{31}} \right]^T.$$

Для линейно-упругого тела, как это следует из (2.55), удельная потенциальная энергия должна быть квадратичной функцией деформаций. В общем случае ее можно записать в виде

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon, \quad (2.56)$$

где  $C$  — симметричная матрица коэффициентов упругости. В форме (2.56) с симметричной матрицей  $C$  можно записать любой однородный квадратичный полином аргумента  $e$ . По-

скольку для деформирования всякого реального тела необходимо затратить энергию, то квадратичная форма (2.56) должна быть положительно определенной, т. е.  $U_0 > 0$  при любых, не равных нулю значениях  $\epsilon$ .

Из выражения (2.56) и определения (2.55) следует матричная запись обобщенного закона Гука

$$\sigma = C \epsilon. \quad (2.57)$$

В общем случае анизотропии в симметричной матрице коэффициентов упругости  $C$  ( $6 \times 6$ ) содержится 21 независимый коэффициент:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ \text{сим.} & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

причем в силу положительной определенности должны выполняться неравенства

$$c_{11} > 0; \quad \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{22} & c_{22} \end{bmatrix} > 0; \dots; \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{16} & c_{26} & \dots & c_{66} \end{bmatrix} > 0, \quad (1, 2, \dots, 6). \quad (2.59)$$

Из условий (2.59) можно получить ограничения на упругие постоянные [22]. Например,  $c_{11} > 0$ ;  $c_{11}c_{22} > c_{12}^2$ ;  $c_{11}c_{22}c_{33} + 2c_{12}c_{23}c_{13} > c_{11}c_{23}^2 + c_{22}c_{13}^2 + c_{33}c_{12}^2$ , (1, 2, ..., 6) и другие. Случай анизотропии общего вида для реальных материалов встречается исключительно редко. Обычно структура материала такова, что его упругие свойства в некоторых направлениях одинаковы, тогда число независимых коэффициентов в матрице  $C$  (2.58) уменьшается и при надлежащем выборе системы координат матрица  $C$  становится разреженной.

Прежде чем обсуждать различные свойства упругой симметрии, установим в общем случае преобразование матрицы коэффициентов упругости при переходе к новой системе координат. При расчете многослойных конструкций из композиционных материалов к такому преобразованию прибегают достаточно часто, поскольку упругие постоянные отдельных слоев задаются в системе координат, связанной со слоем и в общем случае отличной от системы координат, в которой рассматривается конструкция в целом.

Пусть в системе ортогональных координат  $Ox_1'x_2'x_3'$  известны матрица коэффициентов упругости  $C'$  и вектор-столбец деформаций  $e'$ , компоненты которого упорядочены следующим образом:  $e' = [e_1', e_2', e_3', e_{12}', e_{23}', e_{31}']^T$ . Рассмотрев другую систему ортогональных координат  $Ox_1x_2x_3$ , можно установить, что связь компонент тензоров деформаций записывается в виде  $\varepsilon'_{ij} = l_{ik} \varepsilon_{kl} l_{jl}$ , где  $l_{ik}$  — косинус угла между осями  $Ox_k$  и  $Ox_i'$ . Тогда связь вектор-столбцов деформаций в старой и новой системах координат будет определяться линейным соотношением

$$e' = \beta e, \quad (2.60)$$

где матрица  $\beta$  содержит комбинации произведений направляющих косинусов. Матрицу  $\beta$  удобно представить в блочном виде

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix},$$

где матричные блоки  $\beta_{ij}$  имеют следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 & l_{13}^2 \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 & l_{23}^2 \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & l_{33}^2 \end{bmatrix}; & \beta_{12} &= \begin{bmatrix} l_{11}l_{12} & l_{12}l_{13} & l_{13}l_{11} \\ l_{21}l_{22} & l_{22}l_{23} & l_{23}l_{21} \\ l_{31}l_{32} & l_{32}l_{33} & l_{33}l_{31} \end{bmatrix}; \\ \beta_{21} &= \begin{bmatrix} 2l_{11}l_{21} & 2l_{12}l_{22} & 2l_{13}l_{23} \\ 2l_{21}l_{31} & 2l_{22}l_{32} & 2l_{23}l_{33} \\ 2l_{31}l_{11} & 2l_{32}l_{12} & 2l_{33}l_{13} \end{bmatrix}; & \\ \beta_{22} &= \begin{bmatrix} (l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}) & (l_{12}l_{23} + l_{13}l_{22}) & (l_{11}l_{23} + l_{13}l_{21}) \\ (l_{22}l_{31} + l_{21}l_{32}) & (l_{22}l_{33} + l_{23}l_{32}) & (l_{23}l_{31} + l_{21}l_{33}) \\ (l_{31}l_{12} + l_{32}l_{11}) & (l_{33}l_{12} + l_{32}l_{13}) & (l_{33}l_{11} + l_{31}l_{13}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

В пределах каждого квадратного матричного блока  $\beta_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) индексы коэффициентов подчиняются циклической перестановке (1, 2, 3): в пределах отдельной строки изменяется второй индекс, в пределах столбца — первый.

Поскольку удельная потенциальная энергия деформации инвариантна к преобразованию координат, то

$$U_0 = \frac{1}{2} e^T C e = \frac{1}{2} (e')^T C' e'.$$

Отсюда с учетом (2.60) получаем выражение для матрицы коэффициентов упругости  $C$  в новой системе координат:

$$C = \beta^T C' \beta. \quad (2.62)$$

Таким образом, если для произвольного анизотропного тела известны коэффициенты упругости (коэффициенты матрицы  $C'$ ) в системе ортогональных координат  $Ox_1'x_2'x_3'$ , то преобразо-

вание (2.62) позволяет вычислить коэффициенты упругости этого материала (коэффициенты матрицы  $C$ ) в системе координат  $ox_1x_2x_3$ .

## 2.4.2. Свойства упругой симметрии

Пусть структура анизотропного тела такова, что в любой его точке упругие свойства эквивалентны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости. Такую плоскость называют плоскостью упругой симметрии. Совместим с плоскостью упругой симметрии систему координат  $ox_1'x_2'x_3'$  так, чтобы ось  $ox_3'$  была перпендикулярна плоскости (рис. 2.7). Затем перейдем к системе координат  $ox_1x_2x_3$ , симметричной относительно плоскости упругой симметрии. В этом случае направляющие косинусы будут  $l_{11}=l_{22}=-l_{33}=1$ ,  $l_{ij}=0$  ( $i \neq j$ ), а матрица преобразований  $\beta$  согласно (2.61) будет диагональной  $\beta = [1, 1, 1, 1, -1, -1]$ .

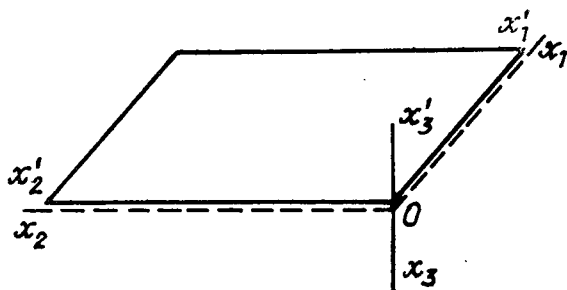


Рис. 2.7. Плоскость упругой симметрии

Если выполнить операции (2.62), то можно обнаружить, что некоторые коэффициенты в пятых и шестых колонках и строках изменили знаки ( $c_{ij}=c_{ij}'$  при  $i, j=1, 2, 3, 4$  и при  $i, j=5, 6$ ; для остальных коэффициентов  $c_{ij}=-c_{ij}'$ ). Но по определению свойств упругости рассматриваемого тела при таком преобразовании системы координат коэффициенты не должны изменяться. Поэтому можно сделать вывод, что матрица  $C'$  должна иметь следующую структуру:

$$C' = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & c'_{14} & 0 & 0 \\ & c'_{22} & c'_{23} & c'_{24} & 0 & 0 \\ & & c'_{33} & c'_{34} & 0 & 0 \\ & & & c'_{44} & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & & c'_{55} & c'_{56} \\ & & & & & c'_{66} \end{bmatrix}.$$



Таким образом, для анизотропного тела, имеющего одну плоскость симметрии, число независимых коэффициентов упругости сокращается до 13.

Аналогичным способом можно показать, что если тело имеет две плоскости симметрии (рис. 2.8), то матрица коэффициентов упругости  $C'$  в системе координат  $ox_1'x_2'x_3$  должна иметь структуру

$$C' = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c'_{22} & c'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c'_{44} & 0 & 0 \\ \text{сим.} & & & & c'_{55} & 0 \\ & & & & & c'_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

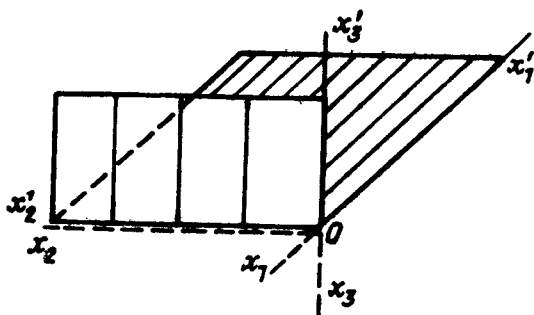


Рис. 2.8. Две плоскости упругой симметрии

В этом случае плоскость  $x_1'ox_3'$  также будет плоскостью упругой симметрии. Такое тело называют ортотропным и для него число независимых коэффициентов упругости равно девяти.

Если для ортотропного материала при повороте систем координат относительно одной из главных осей симметрии, например оси  $ox_1'$  рис. 2.9, на произвольный угол  $\varphi$  его упругие свой-

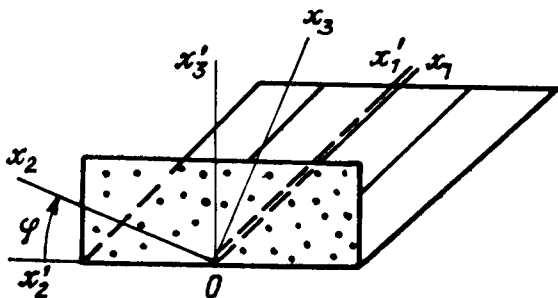


Рис. 2.9. Поворот системы координат относительно одной из главных осей симметрии

ства не изменяются, то такой материал называют трансверсально изотропным. В этом случае среди направляющих косинусов ненулевые значения будут иметь

$$l_{11}=1; l_{22}=\cos \varphi; l_{23}=-\sin \varphi;$$

$$l_{32}=\sin \varphi; l_{33}=\cos \varphi.$$

Заполнив матрицу преобразования деформаций  $\beta$  согласно (2.61), выполнив операции пересчета коэффициентов упругости (2.62) и воспользовавшись определением трансверсально изотропного тела с плоскостью  $x_2O'x_3'$ , получим, что

$$c'_{13}=c'_{12}; \quad c'_{33}=c'_{22}; \quad c'_{55}=(c'_{22}-c'_{23})/2; \quad c'_{66}=c'_{44}.$$

Таким образом, для трансверсально изотропного тела число независимых констант упругости сокращается до 5. Однонаправленный волокнистый композитный материал при равномерном распределении армирующих волокон (рис. 2.10) согласно определению можно отнести к трансверсально изотропным материалам.

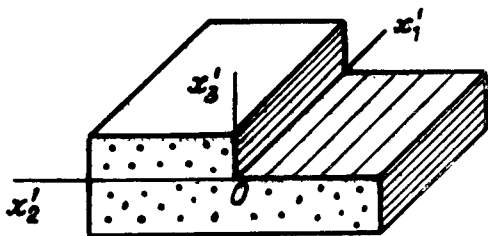


Рис. 2.10. Схема однонаправленного волокнистого композитного материала

Для изотропного материала, в котором все направления являются упругоэквивалентными, дополнительно получим, что

$$c'_{23}=c'_{12}; \quad c'_{22}=c'_{11}; \quad c'_{66}=(c'_{11}-c'_{12})/2,$$

и число независимых коэффициентов упругости будет равно двум.

### 2.4.3. Ортотропный материал

Наиболее часто в практике расчетов многослойных конструкций встречается преобразование коэффициентов матрицы упругости ортотропного тела при повороте системы координат вокруг оси  $ox_3'$  (которая совпадает с нормалью к плоскости слоя) на угол  $\varphi$  (рис. 2.11). Матрица коэффициентов упругости  $C'$  в осях слоя  $ox_1'x_2'x_3'$  имеет структуру (2.63). Преобразова-

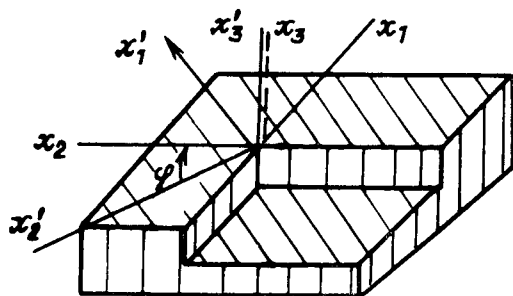


Рис. 2.11. Поворот системы координат вокруг нормали к плоскости слоя

ние коэффициентов упругости осуществляется согласно (2.62), где для случая поворота вокруг оси  $ox'_3$  коэффициенты матрицы  $\beta$  имеют следующий вид:

$$\beta = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & -sc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} c &= \cos \varphi; \\ s &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

После выполнения операций (2.62) получим следующие выражения для ненулевых коэффициентов симметричной матрицы  $C$ :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c'_{11}c^4 + c'_{22}s^4 + 2(c'_{12} + 2c'_{44})s^2c^2; \\ c_{12} &= c'_{12}(c^4 + s^4) + (c'_{11} + c'_{22} - 4c'_{44})s^2c^2; \\ c_{13} &= c'_{13}c^2 + c'_{23}s^2; \\ c_{14} &= [c'_{11}c^2 + (c'_{12} + 2c'_{44})(s^2 - c^2) - c'_{22}s^2]sc; \\ c_{22} &= c'_{11}s^4 + c'_{22}c^4 + 2(c'_{12} + 2c'_{44})s^2c^2; \\ c_{23} &= c'_{13}s^2 + c'_{23}c^2; \\ c_{24} &= [c'_{11}s^2 + (c'_{12} + 2c'_{44})(c^2 - s^2) - c'_{22}c^2]sc; \\ c_{33} &= c'_{33}; \quad c_{34} = (c'_{13} - c'_{23})sc; \\ c_{44} &= (c'_{11} - 2c'_{12} + c'_{22})s^2c^2 + c'_{44}(c^2 - s^2)^2; \\ c_{55} &= c'_{55}c^2 + c'_{66}s^2; \\ c_{56} &= -c'_{55}sc + c'_{66}sc; \quad c_{66} = c'_{55}s^2 + c'_{66}c^2. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Воспользовавшись тригонометрическими преобразованиями, можно получить иную форму записи коэффициентов матрицы упругости

$$\begin{aligned}
c_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi; \\
c_{12} &= V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\varphi; \\
c_{13} &= V_5 + V_6 \cos 2\varphi; \\
c_{14} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi + V_3 \sin 4\varphi; \\
c_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\varphi + V_3 \cos 4\varphi; \\
c_{23} &= V_5 - V_6 \cos 2\varphi; \\
c_{24} &= \frac{1}{2} V_2 \sin 2\varphi - V_3 \sin 4\varphi; \\
c_{33} &= V_7; \quad c_{34} = V_6 \sin 2\varphi; \\
c_{44} &= V_4 - V_3 \cos 4\varphi; \quad c_{55} = V_8 - V_9 \cos 2\varphi; \\
c_{56} &= V_9 \sin 2\varphi; \quad c_{66} = V_8 + V_9 \cos 2\varphi,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

где

$$\begin{aligned}
V_1 &= (3c'_{11} + 2c'_{12} + 3c'_{22} + 4c'_{44})/8; \\
V_2 &= (c'_{11} - c'_{22})/2; \\
V_3 &= (c'_{11} - 2c'_{12} + c'_{22} - 4c'_{44})/8; \\
V_4 &= (c'_{11} - 2c'_{12} + c'_{22} + 4c'_{44})/8; \\
V_5 &= (c'_{13} + c'_{23})/2; \quad V_6 = (c'_{13} - c'_{23})/2; \\
V_7 &= c'_{33}; \quad V_8 = (c'_{55} + c'_{66})/2; \quad V_9 = (c'_{66} - c'_{55})/2.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Число коэффициентов  $V_k$  не случайно равно девяти, поскольку оно отражает то обстоятельство, что независимо от преобразований системы координат число независимых характеристик материала определяется лишь типом его симметрии.

Из (2.64), (2.65), (2.66) видно, что при повороте координатной системы вокруг оси  $ox_3'$  пять независимых характеристик  $V_1, V_4, V_5, V_7, V_8$  остаются постоянными величинами. Инвариантными являются также и их комбинации. Например,  $4(V_1 - V_4) = c'_{11} + c'_{22} + 2c'_{12} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12}$  и другие. Число инвариантных характеристик, равное 5, также не является случайным. Для трансверсально изотропного тела с плоскостью упругой симметрии, совпадающей с плоскостью  $ox_1'x_2'$  (рис. 2.11), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
V_1 &= c'_{11} = c'_{22}; \quad V_4 = (c'_{11} - c'_{12})/2 = c'_{44}; \\
V_5 &= c'_{13}; \quad V_7 = c'_{33}; \quad V_8 = c'_{55} - c'_{66}.
\end{aligned}$$

Поэтому можно считать, что пять коэффициентов  $V_1, V_4, V_5, V_7, V_8$  характеризуют средние жесткости ортотропного материала, а четыре коэффициента  $V_2, V_3, V_6, V_9$  характеризуют степень анизотропии. Например,

$$c_{11}^{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{11} d\varphi = V_1; \quad c_{44}^{cp} = V_4; \quad c_{13}^{cp} = c_{23}^{cp} = V_5;$$

$$c_{33}^{cp} = V_7; \quad c_{66}^{cp} = c_{55}^{cp} = V_8; \quad c_{22}^{cp} = c_{11}^{cp}.$$

На рис. 2.12 показана примерная зависимость коэффициента  $c_{11}$  от угла поворота системы координат  $\varphi$  (рис. 2.11).

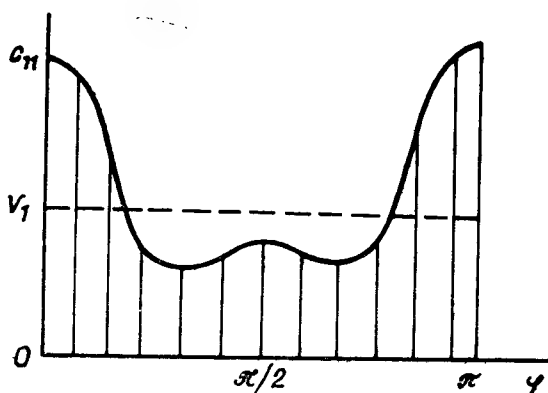


Рис. 2.12. Изменение коэффициента упругости  $c_{11}$  от угла поворота  $\varphi$  системы координат

Характеристики ортотропного материала обычно задают техническими постоянными в системе координат, оси которой совпадают с главными осями упругой симметрии. К таким характеристикам относятся модули упругости  $E_1, E_2, E_3$ , соответствующие направлениям  $ox_1', ox_2', ox_3'$  (рис. 2.11); модули сдвига  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$  в плоскостях  $x_1'ox_2'; x_2'ox_3'; x_3'ox_1'$  и коэффициенты поперечных деформаций  $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  (первый индекс указывает направление действующего напряжения, а второй — направление возникающей при этом поперечной деформации, причем  $E_2\nu_{12} = E_1\nu_{21}$  (1, 2, 3). Через технические постоянные связь деформаций с напряжениями записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{\sigma_1'}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2'}{E_2} - \nu_{31} \frac{\sigma_3'}{E_3}, \quad (1, 2, 3); \\ e_{12} &= \sigma_{12}' / G_{12}, \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Обратные соотношения, определяющие связь напряжений с деформациями, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= c_{11}' e_1' + c_{12}' e_2' + c_{13}' e_3', \quad (1, 2, 3) \\ \sigma_{12}' &= G_{12} e_{12}', \quad (1, 2, 3) \end{aligned}$$

и коэффициенты матрицы упругости  $C'$  (2.63) через технические постоянные вычисляются так:

$$\begin{aligned} c'_{11} &= E_1 (1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta, \quad (1, 2, 3); \\ c'_{12} &= E_1 (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/\Delta, \quad (1, 2, 3); \\ c'_{44} &= G_{12}; \quad c'_{55} = G_{23}; \quad c'_{66} = G_{31}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} & -\nu_{13} \\ -\nu_{21} & 1 & -\nu_{23} \\ -\nu_{31} & -\nu_{32} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \\ - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}; \quad E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}.$$

Из приведенных соотношений упругости для ортотропного материала (2.67) следует, что при нагружении деформируемого тела вдоль осей ортотропии  $ox'_1, ox'_2, ox'_3$  изменений прямых углов между этими осями не происходит, а касательные напряжения  $\sigma'_{12}, \sigma'_{23}, \sigma'_{31}$  не вызывают удлинений вдоль осей ортотропии.

#### 2.4.4. Трансверсально несжимаемый ортотропный материал

Представим, что мы имеем дело с ортотропным материалом, не сжимаемым в направлении оси  $ox'_3$ . В этом случае, как следует из связи деформаций с напряжениями (2.67), при  $E_3 \rightarrow \infty$  получим

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= \frac{\sigma'_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma'_2}{E_2}, \quad (1, 2); \\ e'_{12} &= \sigma'_{12}/G_{12}, \quad (1, 2, 3); \\ e'_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

Соотношения упругости, связывающие напряжения с деформациями, получим из уравнений (2.69), разрешив их относительно напряжений. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e'_1 + \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e'_2, \quad (1, 2); \\ \sigma'_{12} &= G_{12}e'_{12}, \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Полученную связь напряжений с деформациями (2.70) удобно представить в виде двух матричных выражений

$$\sigma' = C_e' e'; \quad \tau' = C_\gamma' \gamma', \quad (2.71)$$

где

$$\sigma' = [\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_{12}]^T; \quad e' = [e'_1, e'_2, e'_{12}]^T;$$

$$\tau' = [\sigma'_{31}, \sigma'_{32}]^T; \quad \gamma' = [e'_{31}, e'_{32}]^T;$$

$$C_e' = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & 0 \\ c'_{12} & c'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c'_{44} \end{bmatrix}; \quad C_\gamma' = \begin{bmatrix} c'_{66} & 0 \\ 0 & c'_{55} \end{bmatrix};$$

$$c'_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad (1, 2); \quad c'_{12} = c'_{11}\nu_{21}; \quad c'_{44} = G_{12};$$

$$c'_{66} = G_{31}; \quad c'_{55} = G_{32}.$$

При переходе к новой ортогональной системе координат, повернутой относительно оси  $ox_3'$  на угол  $\varphi$  (рис. 2.11), получим связи деформаций

$$e' = \beta_e e; \quad \gamma' = \beta_\gamma \gamma, \quad (2.72)$$

где

$$e = [e_1, e_2, e_{12}]^T; \quad \gamma = [e_{31}, e_{32}]^T;$$

$$\beta_e = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; \quad \beta_\gamma = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix};$$

$$c = \cos \varphi; \quad s = \sin \varphi.$$

Соотношения упругости в системе координат  $ox_1x_2x_3$  будут иметь следующий вид:

$$\sigma = C_e e; \quad \tau = C_\gamma \gamma, \quad (2.73)$$

где

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}]^T; \quad e = [e_1, e_2, e_{12}]^T;$$

$$\tau = [\sigma_{31}, \sigma_{32}]^T; \quad \gamma = [e_{31}, e_{32}]^T.$$

Связи матриц коэффициентов упругости определяются выражениями

$$C_e = \beta_e^T C_e' \beta_e; \quad C_\gamma = \beta_\gamma^T C_\gamma' \beta_\gamma, \quad (2.74)$$

где

$$C_e = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{24} \\ c_{14} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix}; \quad C_\gamma = \begin{bmatrix} c_{66} & c_{56} \\ c_{56} & c_{55} \end{bmatrix}.$$

В развернутом виде коэффициенты матриц  $C_e$  и  $C_\gamma$  определяются через коэффициенты матриц  $C_e'$  и  $C_\gamma'$  выражениями (2.64) или (2.65).

Статические соотношения, связывающие напряжения в системах координат  $ox_1'x_2'x_3'$  и  $ox_1x_2x_3$ , будут иметь вид [11] (рис. 2.13)

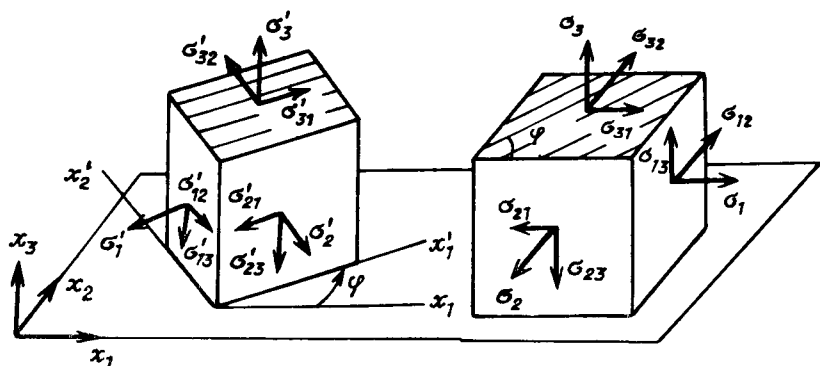


Рис. 2.13. Компоненты напряженного состояния в системах координат слоя и конструкции

$$\begin{aligned}
 \sigma'_1 &= \sigma_1 c^2 + \sigma_2 s^2 + \sigma_{12} 2sc; \\
 \sigma'_2 &= \sigma_1 s^2 + \sigma_2 c^2 - \sigma_{12} 2sc; \\
 \sigma'_{12} &= -\sigma_1 sc + \sigma_2 sc + \sigma_{12}(c^2 - s^2); \\
 \sigma'_{31} &= \sigma_{31}c - \sigma_{32}s; \quad \sigma'_{32} = -\sigma_{31}s + \sigma_{32}c,
 \end{aligned}
 \tag{2.75}$$

или в матричном виде

$$\sigma' = \beta_e^{-T} \sigma; \quad \tau' = \beta_V^{-T} \tau,
 \tag{2.76}$$

где  $(\cdot)^{-T} = ((\cdot)^T)^{-1}$

Практический интерес представляет определение упругих характеристик слоистого материала, образованного однородной по толщине укладкой тонких ортотропных слоев с углами ориентации  $[\pm\varphi]$  (рис. 2.14).

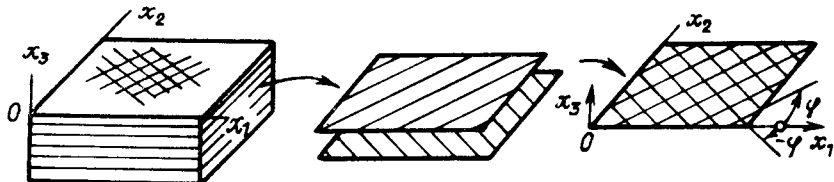


Рис. 2.14. Схема симметрично армированного слоя

В этом случае, осреднив по толщине многослойный пакет, получим ортотропный материал, упругие характеристики которого в координатах  $ox_1x_2x_3$  выглядят так:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c'_{11}c^4 + c'_{22}s^4 + 2(c'_{12} + 2c'_{44})s^2c^2 \quad (1, 2); \\
 c_{12} &= c'_{12}(c^4 + s^4) + (c'_{11} + c'_{22} - 4c'_{44})s^2c^2; \\
 c_{44} &= (c'_{11} - 2c'_{12} + c'_{22})s^2c^2 + c'_{44}(c^2 - s^2)^2; \\
 c_{14} &= c_{24} = 0; \\
 c_{66} &= c'_{55}s^2 + c'_{66}c^2; \quad c_{55} = c'_{55}c^2 + c'_{66}s^2; \\
 c_{56} &= 0; \quad c_{ij} = c_{ji}; \quad c'_{ij} = c'_{ji}.
 \end{aligned}
 \tag{2.77}$$



Соотношениями (2.77) пользуются для определения коэффициентов упругости композитного материала, составленного из равномерно чередующихся однонаправленных слоев с углами армирования  $\pm\varphi$ .

Рассмотрим термоупругие характеристики transversально несжимаемого ортотропного материала. В случае температурного воздействия в таком материале появляются дополнительные деформации вдоль осей ортотропии, связанные с линейным температурным расширением. Поэтому вместо соотношений упругости (2.69) следует записать

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{\sigma_1'}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2'}{E_2} + \alpha_1^0 T, \quad (1, 2); \\ e_{12}' &= \sigma_{12}' / G_{12}, \quad (1, 2, 3); \\ e_3' &= 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где  $\alpha_1^0, \alpha_2^0$  — коэффициенты линейного температурного расширения;  $T$  — приращение температуры.

Выразив из уравнений (2.78) напряжения, получим

$$\sigma' = C_e' e' - \sigma_\tau'; \quad \tau' = C_\gamma' \gamma', \quad (2.79)$$

где

$$\sigma_\tau' = C_e' e_\tau'; \quad e_\tau' = T [\alpha_1^0, \alpha_2^0, 0]^T;$$

матрицы  $C_e', C_\gamma'$  и вектор-столбцы  $\sigma', e', \tau', \gamma'$  определены ранее для соотношений упругости (2.71).

Воспользуемся тем обстоятельством, что работа внутренних сил на возможных перемещениях инварианта относительно преобразования координат, т. е.

$$(\delta e')^T \sigma' + (\delta \gamma')^T \tau' = \delta e^T \sigma + \delta \gamma^T \tau,$$

тогда с учетом соотношений упругости (2.79) и преобразований деформаций (2.72) работу внутренних сил запишем так:

$$\delta e^T \beta_e^T (C_e' \beta_e e - \sigma_\tau') + \delta \gamma^T \beta_\gamma^T C_\gamma' \beta_\gamma \gamma = \delta e^T \sigma + \delta \gamma^T \tau.$$

Приравняв сомножители при возможностях деформациях, получим выражения для соотношений упругости

$$\begin{aligned} \sigma &= C_e e - \sigma_\tau, \\ \tau &= C_\gamma \gamma, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где

$$C_e = \beta_e^T C_e' \beta_e; \quad C_\gamma = \beta_\gamma^T C_\gamma' \beta_\gamma;$$

$$\sigma_\tau = \beta_e^T \sigma_\tau'.$$

После выполнения матричных умножений можно показать, что компоненты вектор-столбца

$$\sigma_T = [\sigma_{1T}, \sigma_{2T}, \sigma_{12T}]^T$$

будут вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{1T} &= T (c^2 (c'_{11}\alpha_1^0 + c'_{12}\alpha_2^0) + s^2 (c'_{12}\alpha_1^0 + c'_{22}\alpha_2^0)); \\ \sigma_{2T} &= T (s^2 (c'_{11}\alpha_1^0 + c'_{12}\alpha_2^0) + c^2 (c'_{12}\alpha_1^0 + c'_{22}\alpha_2^0)); \\ \sigma_{12T} &= T s c (c'_{11}\alpha_1^0 + c'_{12}\alpha_2^0 - c'_{12}\alpha_1^0 - c'_{22}\alpha_2^0),\end{aligned}\tag{2.81}$$

где  $s = \sin \varphi$ ;  $c = \cos \varphi$ .

Для слоистого ортотропного материала с углами укладки слоев  $[\pm\varphi]$  (рис. 2.14), как это следует из (2.81), средние напряжения  $\sigma_{12T} = 0$ .

## 2.5. МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

### 2.5.1. Энергетические оценки моделей деформирования

Дадим качественную оценку комплексов геометрических и упругих характеристик многослойной оболочки, в соответствии с которыми в оболочке будут преобладать те или иные деформации. Такие предварительные оценки, пусть даже грубые, полезны, поскольку они помогают выбрать соответствующую модель деформирования и приближенно оценить трудоемкость предстоящего расчета.

Воспользуемся энергетическими оценками для многослойной пластины [8], подвергающейся поперечному изгибу. Представим плотность потенциальной энергии деформации многослойной пластины в виде суммы трех слагаемых

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i,\tag{2.82}$$

где  $U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_{12} e_{12})$  — плотность энергии деформаций в плоскости пластины;  $U_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{31} e_{31} + \sigma_{32} e_{32})$  — плотность энергии деформаций поперечных сдвигов;  $U_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 e_3$  — плотность энергии деформации поперечного растяжения — сжатия. Для получения энергетических оценок требуется провести сравнение указанных слагаемых.

Дадим оценку упругим характеристикам материала. Будем считать, что в плоскости пластины средний модуль упругости имеет порядок  $E$ . Величину  $E$  будем называть характерным модулем. За величину  $E$  можно, например, принять  $\min(V_1, V_4)$  (2.66). Таким образом, будем считать, что  $E_1 \sim E_2 \sim G_{12} \sim E$ . Средние модули поперечного сдвига оценим величиной  $G$ , т. е.

$G_{31} \sim G_{32} \sim G$ . Средний модуль поперечного растяжения — сжатия обозначим  $E_z$ . В том случае, если многослойный пакет состоит из чередующихся жестких и податливых слоев, то для оценки модулей  $E$ ,  $G$ ,  $E_z$  воспользуемся также осреднением по толщине  $h$  (для  $E$  — осреднением жесткостей, для  $G$  и  $E_z$  — податливостей):

$$Eh = E'h' + E''h'';$$

$$\frac{h}{G} = \frac{h'}{G'} + \frac{h''}{G''}; \quad \frac{h}{E_z} = \frac{h'}{E_z'} + \frac{h''}{E_z''};$$

где  $h = h' + h''$ , одним штрихом отмечены характеристики жестких слоев, двумя штрихами — податливых.

Будем считать, что при изгибе пластины основными являются напряжения растяжения — сжатия и сдвига в плоскости пластины. Порядок основных напряжений положим равным  $\sigma$ , а порядок основных деформаций  $e$  определим, используя соотношение упругости

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \sigma_{12} \sim \sigma; \quad e_1 \sim e_2 \sim e_{12} \sim \sigma/E = e. \quad (2.83)$$

Порядки напряжений поперечного сдвига и поперечного растяжения — сжатия можно приближенно установить, воспользовавшись уравнениями равновесия (2.48). Если принять предположение о том, что изменяемость напряженного состояния вдоль координатных линий  $\alpha_1, \alpha_2, z$  для пластины ( $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ ) характеризуется масштабными коэффициентами  $l$  и  $h$ , т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\cdot) \sim \frac{1}{l} (\cdot) \quad (1, 2); \quad \frac{\partial}{\partial z} (\cdot) \sim \frac{1}{h} (\cdot),$$

где  $l$  — характерный размер пластины в плане;  $h$  — толщина пластины, то можно получить

$$\sigma_{31} \sim \sigma_{32} \sim \frac{h}{l} \sigma; \quad \sigma_3 \sim \left(\frac{h}{l}\right)^2 \sigma. \quad (2.84)$$

Порядки соответствующих деформаций оценим с помощью соотношений упругости

$$e_{31} \sim e_{32} \sim \frac{h}{l} \frac{\sigma}{G} = \frac{h}{l} \frac{E}{G} e; \quad e_3 \sim \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{\sigma}{E_z} = \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{E_z} e. \quad (2.85)$$

Принимая во внимание полученные оценки для напряжений и деформаций (2.83) — (2.85), можно дать следующую оценку плотности потенциальной энергии  $U$  (2.82):

$$U \sim E e^2 \left( 1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{G} + \left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{E}{E_z} \right). \quad (2.86)$$

Ограничившись 5%-ной погрешностью оценки составляющих  $U_i$  (2.86), заключаем, что при

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{G} < \frac{1}{20} \text{ и } \left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{E}{E_z} < \frac{1}{20}$$

можно считать  $e_{31}=e_{32}=e_3=0$ , и расчет можно проводить без учета деформаций поперечного сдвига и деформаций поперечного растяжения — сжатия. Такие модели деформирования многослойных оболочек соответствуют гипотезам Кирхгофа — Лява. При

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{G} \geq \frac{1}{20} \text{ и } \left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{E}{E_z} < \frac{1}{20} \quad (2.87)$$

можно считать, что  $e_3=0$ . В этом случае в расчетах необходимо учитывать деформации поперечных сдвигов; в поперечном направлении оболочку можно считать несжимаемой. При

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{E}{G} \geq \frac{1}{20}; \quad \left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{E}{E_z} \geq \frac{1}{20}$$

необходимо решать трехмерную задачу теории упругости. Как правило, для таких задач имеем  $l \sim h$  и под  $l$  понимается масштаб изменения напряженно-деформированного состояния, которое имеет локальный характер [8]. Такое деформирование происходит, например, в окрестности точек приложения сосредоточенных сил, закреплений, а также при коротковолновых изгибных колебаниях и местных формах потери устойчивости многослойных оболочек.

### 2.5.2. Кинематические и статические гипотезы

Рассмотрим кинематические и статические гипотезы, лежащие в основе теории многослойных оболочек типа Тимошенко. При выполнении условий (2.87) материал оболочек можно считать несжимаемым в поперечном направлении. Соотношения упругости для такого материала были приведены в разд. 2.4.4. При модуле упругости  $E_3 \rightarrow \infty$ , как следует из закона Гука (2.69), деформация растяжения — сжатия в направлении оси  $oz$  равна нулю ( $e_3=0$ ). Ограничившись линейным представлением  $e_3=e_{3(z)}$ , получим из (2.39)

$$v_{3,3} = \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0. \quad (2.88)$$

Отсюда следует, что нормальное перемещение оболочки  $v_3$  не изменяется вдоль координаты  $z$ , т. е.

$$v_3(z, \alpha_1, \alpha_2) = w(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.89)$$

Предположение о несжимаемости оболочки в поперечном направлении (2.88) или (2.89) можно рассматривать как первую кинематическую гипотезу теории.

В качестве второй кинематической гипотезы примем предположение о линейном распределении по толщине оболочки касательных перемещений  $v_1, v_2$ , т. е.

$$v_1(z, \alpha_1, \alpha_2) = u_1 + z\theta_1, \quad (1, 2), \quad (2.90)$$

где  $u_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2)$  — касательное перемещение вдоль оси  $\alpha_1$  координатной поверхности в процессе деформирования;  $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2)$  — угол поворота сечения (рис. 2.15). Перемещения (2.89) и (2.90) позволяют представить линейные деформации (2.39) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \frac{A_1}{H_1} (\varepsilon_1 + z\kappa_1), \quad (1, 2); \\ \gamma_{12(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \varepsilon_{12} + \frac{A_2}{H_2} \varepsilon_{21} + z \left( \frac{A_1}{H_1} \kappa_{12} + \frac{A_2}{H_2} \kappa_{21} \right); \\ \gamma_{31(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \psi_1, \quad (1, 2); \quad \varepsilon_{3(z)} = 0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \varphi_{12} u_2 + k_1 w, \quad (1, 2); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \theta_{1,1} + \varphi_{12} \theta_2, \quad (1, 2); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_1} u_{2,1} - \varphi_{12} u_1, \quad (1, 2); \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{A_1} \theta_{2,1} - \psi_{12} \theta_1, \quad (1, 2); \\ \psi_1 &= \theta_1 + \frac{1}{A_1} w_{,1} - k_1 u_1, \quad (1, 2). \end{aligned} \quad (2.92)$$

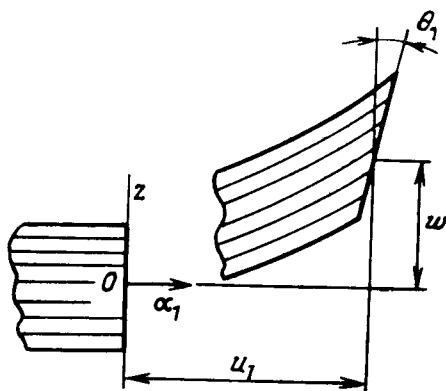


Рис. 2.15. Распределение перемещений по толщине оболочки при деформировании

Заметим, что вместо кинематических гипотез о линейных аппроксимациях касательных перемещений (2.90) можно было бы ввести предположение о том, что деформации поперечного сдвига  $\gamma_{31}(z)$ ,  $\gamma_{32}(z)$  можно аппроксимировать выражением [11]

$$\gamma_{31}(z) = \frac{A_1}{H_1} \psi_1, \quad (1, 2), \quad (2.93)$$

где  $\psi_1 = \psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$  — функция, подлежащая определению в процессе решения задачи. Соответствующее гипотезам (2.89), (2.93) распределение касательных перемещений  $v_1$ ,  $v_2$  можно получить путем интегрирования уравнений

$$\frac{A_1}{H_1} \psi_1 = \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} w_{,1} - k_1 v_1 \right) + v_{1,3}, \quad (1, 2), \quad (2.94)$$

(см. выражение для  $\gamma_{31}(z)$  (2.39)). Если искать решение (2.94) в виде (2.90), получим  $\theta_1 = \psi_1 - \frac{1}{A_1} w_{,1} + k_1 u_1(1, 2)$ , что соответствует представлению  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  (см. (2.92)).

Таким образом, гипотезами (2.89), (2.90) (или (2.89) и (2.94)) полностью определяется кинематика деформирования многослойной оболочки. В принципе для решения задачи методом перемещений этого достаточно. Однако использование закона Гука  $\sigma_{31} = G_{31} \gamma_{31}(z)$  (1, 2) в том случае, когда модули сдвига  $G_{31}$ ,  $G_{32}$  меняются скачком при переходе от слоя к слою, приведет к разрывности касательных напряжений  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$ , что будет противоречить силовым условиям сопряжения слоев. Это противоречие можно устранить (интегрально по толщине) путем введения статических гипотез о независимой аппроксимации касательных напряжений  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$ .

Предварительно отметим, что распределение нормальных перемещений  $v_3$  (2.89) позволяет предположить [11], что характер распределения трансверсальных касательных напряжений  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  по толщине оболочки не должен оказывать существенного влияния на основное напряженно-деформированное состояние оболочки. Существенными являются лишь равнодействующие этих напряжений, т. е. поперечные силы

$$Q_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^s \sigma_{31} H_2 dz, \quad (1, 2). \quad (2.95)$$

Для удовлетворения (2.95), учитывая непрерывность касательных напряжений по толщине оболочки, можно предложить аппроксимацию характера распределения  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  в наиболее простом виде

$$\sigma_{31} = \frac{Q_1}{h} \frac{A_2}{H_2}, \quad (1, 2), \quad (2.96)$$

где  $h = e + s$  — толщина оболочки. Равенство (2.95) после подстановки (2.96) удовлетворяется тождественно.

Запишем в матричной форме аппроксимации деформаций поперечного сдвига (2.93)

$$\gamma_{(z)} = f_{\gamma} \psi, \quad (2.97)$$

где

$$\gamma_{(z)} = [\gamma_{31}(z), \gamma_{32}(z)]^T; \quad \psi = [\psi_1, \psi_2]^T;$$

$$f_{\gamma} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}; \quad H_{11} = \frac{A_1}{H_1}, \quad (1, 2),$$

а также независимые аппроксимации поперечных касательных напряжений (2.96)

$$\tau = f_{\tau} Q, \quad (2.98)$$

где

$$\tau = [\sigma_{31}, \sigma_{32}]^T; \quad Q = [Q_1, Q_2]^T;$$

$$f_{\tau} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} H_{22} & 0 \\ 0 & H_{11} \end{bmatrix}; \quad H_{11} = \frac{A_1}{H_1} \quad (1, 2).$$

Таким образом, для поперечных деформаций сдвига имеется двойное представление. С одной стороны, через аппроксимации перемещений мы получили выражение (2.97), с другой стороны, через аппроксимацию напряжений (2.98) и соотношения упругости (2.73) можно получить  $C_{\gamma}^{-1} \tau = C_{\gamma}^{-1} f_{\gamma} Q$ . Это противоречие можно устранить интегрально, путем ортогонализации невязки деформации сдвигов к произвольным касательным напряжениям вида (2.98), т. е. потребовать

$$\int_{-e}^s \delta \tau^T (C_{\gamma}^{-1} \tau - \gamma_{(z)}) \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz = 0, \quad (2.99)$$

где

$$\delta \tau = f_{\tau} \delta Q.$$

Подстановка (2.97) и (2.98) в (2.99) приводит к уравнению  $\delta Q^T (K^{-1} Q - \psi) = 0$ . Отсюда получаем

$$Q = K \psi, \quad (2.100)$$

где

$$K = \left[ \int_{-e}^s f_{\tau}^T C_{\gamma}^{-1} f_{\tau} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz \right]^{-1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

При получении (2.100) учитывалось, что

$$\int_{-e}^s f_{\tau}^T f_{\gamma} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz = \int_{-e}^s f_{\gamma}^T f_{\tau} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz = E_{(2 \times 2)}, \quad (2.102)$$

где  $E_{(2 \times 2)}$  — единичная матрица, имеющая размерность  $(2 \times 2)$ .

Матрица  $K$  (2.101) представляет матрицу приведенных жесткостных характеристик многослойной оболочки на поперечный сдвиг. В этом случае, если оси упругой симметрии отдельных слоев совпадают с осями кривизны, то коэффициенты матрицы  $K$  (2.101) вычисляются достаточно просто

$$K_{11} = h^2 \left( \int_{-e}^s \frac{H_{21} dz}{G_{31}} \right)^{-1}, \quad (1, 2); \quad K_{12} = 0, \quad (2.103)$$

где

$$H_{21} = \frac{A_2 H_1}{A_1 H_2}, \quad (1, 2).$$

Полученные приведенные жесткостные характеристики (2.101) соответствуют процедуре суммирования податливостей, выполненной с учетом переменной метрики.

Заметим, что работа трансверсальных касательных напряжений на возможных деформациях поперечного сдвига с учетом (2.97), (2.98) и (2.102) будет записываться следующим образом:

$$\iint_S \int_{-e}^s \delta \gamma_{(z)}^T \tau \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz dS = \iint_S \delta \psi^T Q dS, \quad (2.104)$$

где

$$dS = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Выражение (2.104) будет в дальнейшем использоваться при переходе к двумерной задаче.

### 2.5.3 Формулировка линейных двумерных задач статики и термоупругости

Воспользуемся векторно-матричной символикой для более компактной записи промежуточных выкладок. Дадим определение компонентов вектор-столбцов

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1, v_2, v_3]^T; \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T; \quad \mathbf{e}_{(z)} = [e_{1(z)}, e_{2(z)}, \gamma_{12(z)}]^T \\ \mathbf{e} &= [e_1, e_2, e_{12}, e_{21}]^T; \quad \mathbf{\kappa} = [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}]^T \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\gamma_{(z)} = [\gamma_{31(z)}, \gamma_{32(z)}]^T; \quad \Psi = [\psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}]^T; \quad \tau = [\sigma_{31}, \sigma_{32}]^T.$$

Здесь и в дальнейшем под коэффициентами вектор-столбца  $\mathbf{e}$  будут выступать компоненты мембранных деформаций координатной поверхности. Рассмотренные в предыдущем разделе гипотезы позволяют установить следующие представления о деформировании многослойной оболочки.



Распределение перемещений по толщине оболочки задается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_v \mathbf{u}, \quad (2.106)$$

где

$$\mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{f}_v$  заполняется согласно кинематическим гипотезам о распределении перемещений (2.89), (2.90).

Распределение деформаций по толщине оболочки запишем в матричном виде с использованием соотношений (2.91)

$$\varepsilon_z = \mathbf{f}_\varepsilon (\varepsilon + z \kappa); \quad \gamma_z = \mathbf{f}_\gamma \psi, \quad (2.107)$$

где

$$\mathbf{f}_\varepsilon = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{11} & H_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_\gamma = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix};$$

$$H_{11} = \frac{A_1}{H_1}, \quad (1, 2).$$

Деформационные соотношения (2.92) позволяют выразить компоненты  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  и  $\psi$  через обобщенные перемещения  $\mathbf{u}$

$$\varepsilon = \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{u}; \quad \kappa = \mathbf{L}_\kappa \mathbf{u}; \quad \psi = \mathbf{L}_\psi \mathbf{u}, \quad (2.108)$$

где

$$\mathbf{L}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \nabla_1 & \varphi_{12} & k_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \nabla_2 & k_2 & 0 & 0 \\ -\varphi_{12} & \nabla_1 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_2 & -\varphi_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_1 & \varphi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{21} & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_{12} & \nabla_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 & -\varphi_{21} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_\psi = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & \nabla_1 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & \nabla_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \nabla_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad (1, 2).$$

Статическая гипотеза о распределении по толщине оболочки поперечных касательных напряжений  $\tau$  остается в прежнем виде (2.98).

Поскольку для описания модели деформирования используются как аппроксимации перемещений, так и независимые аппроксимации части компонентов тензора напряжений, то для вариационной постановки задачи следует воспользоваться смешанной формулировкой, соответствующей модифицированному принципу Рейсснера (см. раздел 1.2.2). Для нашего случая вариационными уравнениями будут

$$\iint_S \int_{-e}^s (\delta \varepsilon_{(z)}^T \sigma + \delta \gamma_{(z)}^T \tau) \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz dS - \mathbf{f}_* (\delta \mathbf{v}) = 0; \quad (2.109)$$

$$\iint_S \int_{-e}^s \delta \tau^T (C_V^{-1} \tau - \gamma_{(z)}) \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz dS = 0, \quad (2.110)$$

где

$$\begin{aligned} dS &= A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \quad \delta \mathbf{e}_{(z)} = \mathbf{f}_e (\delta \mathbf{e} + z \delta \mathbf{x}); \\ \delta \gamma_{(z)} &= \mathbf{f}_\gamma \delta \psi; \quad \delta \mathbf{e} = \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u}; \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{L}_x \delta \mathbf{u}; \\ \delta \psi &= \mathbf{L}_\psi \delta \mathbf{u}; \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{f}_v \delta \mathbf{u}; \quad \delta \tau = \mathbf{f}_t \delta \mathbf{Q}; \end{aligned} \quad (2.111)$$

$\mathbf{f}_* (\delta \mathbf{v})$  — линейный функционал работы внешних сил,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_* (\delta \mathbf{v}) &= \iint_S \int_{-e}^s \delta \mathbf{v}^T \mathbf{g} \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz dS + \iint_S \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{p}_e \frac{H_{1e} H_{2e}}{A_1 A_2} dS + \\ &+ \iint_S \delta \mathbf{v}_s^T \mathbf{p}_s \frac{H_{1s} H_{2s}}{A_1 A_2} dS + \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-e}^s \delta \mathbf{v}_\Gamma^T \sigma_\Gamma \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [g_1, g_2, g_3]^T; \quad \delta \mathbf{v}_e = \mathbf{f}_v (z = -e) \delta \mathbf{u}; \quad \delta \mathbf{v}_s = \mathbf{f}_v (z = s) \delta \mathbf{u}; \\ \mathbf{p}_e &= [p_{1e}, p_{2e}, p_{3e}]^T; \quad \mathbf{p}_s = [p_{1s}, p_{2s}, p_{3s}]^T; \\ H_{1e} &= A_1 (1 - k_1 e), \quad (1, 2); \quad H_{1s} = A_1 (1 + k_1 s), \quad (1, 2); \\ \sigma_\Gamma &= [\sigma_v, \sigma_e, \sigma_t]^T; \quad \mathbf{v}_\Gamma = [v_v, v_e, v_t]^T; \end{aligned}$$

$\Gamma_\sigma$  — часть контура, на которой заданы внешние поверхностные силы,  $\delta \mathbf{v}_\Gamma$  — возможные перемещения на контуре  $\Gamma_\sigma$  оболочки. Компоненты векторов  $\mathbf{p}$  и  $\sigma_\Gamma$  условно показаны на рис. 2.15. Направление поверхностных сил  $\sigma_v$  совпадает с направлением внешней нормали к контуру  $v$ ; силы  $\sigma_t$  направлены по касательной  $t$ ;  $\sigma_e$  совпадает с направлением  $t(z)$ .

Для того чтобы выполнить интегрирование (2.109) по переменной  $z$ , дадим следующее определение вектор-столбцов, характеризующих внутренние силовые факторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}]^T = \int_{-e}^s \mathbf{f}_z^T \sigma \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \\ \mathbf{M} &= [M_1, M_2, M_{12}, M_{21}]^T = \int_{-e}^s \mathbf{f}_z^T \sigma z \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \\ \mathbf{Q} &= [Q_1, Q_2]^T = \int_{-e}^s \mathbf{f}_v^T \tau \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz \end{aligned} \quad (2.113)$$

или

$$(N_1, M_1) = \int_{-e}^s \frac{H_2}{A_2} \sigma_1(1, z) dz, \quad (1, 2);$$

$$(N_{12}, M_{12}) = \int_{-e}^s \frac{H_2}{A_2} \sigma_{12}(1, z) dz, \quad (1, 2);$$

$$Q_1 = \int_{-e}^s \frac{H_2}{A_2} \sigma_{31} dz, \quad (1, 2).$$

Компоненты векторов **N**, **Q** и **M** представляют погонные усилия, перерезывающие силы и моменты, приведенные к координатной поверхности (2.52). С учетом (2.111) и (2.113) вариационное уравнение (2.109) можно проинтегрировать по переменной *z*, в результате чего получим

$$\int_S (\delta \varepsilon^T \mathbf{N} + \delta \kappa^T \mathbf{M} + \delta \psi^T \mathbf{Q}) dS - f(\delta \mathbf{u}) = 0. \quad (2.114)$$

Для того чтобы получить выражения для приведенных жесткостных характеристик, связывающих внутренние погонные усилия **N** и моменты **M** с обобщенными деформациями  $\varepsilon$  и  $\kappa$ , воспользуемся соотношениями упругости  $\sigma = C_e \varepsilon(z)$  (2.73), или с учетом (2.107)

$$\sigma = C_e f_\varepsilon (\varepsilon + z \kappa). \quad (2.115)$$

Подстановка (2.115) в выражения для **N** и **M** (2.113) позволяет получить интегральные по толщине соотношения упругости

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B} \varepsilon + \mathbf{C} \kappa; \\ \mathbf{M} &= \mathbf{C} \varepsilon + \mathbf{D} \kappa, \end{aligned} \quad (2.116)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int_{-e}^s \mathbf{f}_\varepsilon^T C_e \mathbf{f}_\varepsilon \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \\ \mathbf{C} &= \int_{-e}^s \mathbf{f}_\varepsilon^T C_e \mathbf{f}_\varepsilon z \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \\ \mathbf{D} &= \int_{-e}^s \mathbf{f}_\varepsilon^T C_e \mathbf{f}_\varepsilon z^2 \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz \end{aligned} \quad (2.117)$$

или в развернутом виде

$$(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \int_{-e}^s \begin{bmatrix} c_{11} H_{12} & c_{12} H_{21} & c_{14} H_{12} & c_{14} H_{21} \\ c_{22} H_{21} & c_{24} H_{12} & c_{25} H_{21} & c_{25} H_{12} \\ \text{сим} & c_{44} H_{12} & c_{44} H_{21} & c_{44} H_{12} \end{bmatrix} (1, z, z^2) dz;$$

$$H_{12} = (1 + k_2 z) / (1 + k_1 z), \quad (1, 2).$$

Симметричные матрицы **B**, **C** и **D** характеризуют приведенные мембранные, смешанные (мембранно-изгибные) и изгибные жесткостные характеристики оболочки.

Для перерезывающих сил **Q** связь с обобщенными деформациями  $\psi$  устанавливается на основе интегрирования по толщине оболочки уравнения (2.110). Это было выполнено в предыдущем разделе и получено соотношение (2.100).

Выражение для линейного функционала работы внешних сил  $f(\delta u)$  (2.114) можно получить из  $f_*(\delta v)$  (2.112) после выполнения интегрирования по переменной  $z$ :

$$f(\delta u) = \int_S \delta u^T p dS + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^T p d\Gamma, \quad (2.118)$$

где

$$p = \int_{-e}^s f_v^T g \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz + f_v^T(-e) p_e \frac{H_{1e} H_{2e}}{A_1 A_2} + f_v^T(s) \frac{H_{1s} H_{2s}}{A_1 A_2} p_s,$$

$$p = \int_{-e}^s f_v^T M^v \sigma_\Gamma \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \quad M^v = \begin{bmatrix} l_{v1} & l_{v2} & 0 \\ l_{e1} & l_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$l_{vi}$ ,  $l_{ei}$  — косинусы углов между осями  $v$ ,  $l$  и касательными к  $\alpha_i$  — линиям на контуре  $\Gamma$ ; ось  $t$  совпадает с осью  $z$  (рис. 2.16).

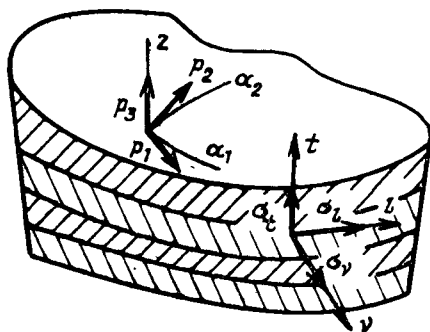


Рис. 2.16. Элемент контура многослойной оболочки

Компоненты вектор-столбца приведенных нагрузок **p** представляют распределенные по поверхности  $z=0$  касательные и нормальные силы, а также моменты, статически эквивалентные объемным силам **g** и поверхностным нагрузкам, действующим на поверхностях  $z=-e$ ,  $z=s$ . Компоненты вектор-столбца внешних силовых факторов **p** представляют погонные усилия и моменты, заданные на контуре  $\Gamma_\sigma$ .

Полученное вариационное уравнение (2.114) можно рассматривать как двумерную формулировку принципа возможных перемещений для линейной задачи статики многослойной оболочки. Воспользовавшись деформационными соотношениями (2.108), уравнение (2.114) можно записать в виде

$$\iint_S ((L_\epsilon \delta u)^T N + (L_\kappa \delta u)^T M + (L_\psi \delta u)^T Q) dS - f(\delta u) = 0. \quad (2.119)$$

Если воспользоваться формулами Остроградского—Гаусса и избавиться в (2.119) от дифференциальных операторов, действующих на  $\delta u$ , то уравнение (2.119) с учетом (2.118) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iint_S \delta u^T (L_\epsilon^* N + L_\kappa^* M + L_\psi^* Q - p) dS + \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^T (L_\epsilon^\vee N + L_\kappa^\vee M + L_\psi^\vee Q - \bar{p}) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (2.120)$$

где матрицы  $L_\epsilon^*$ ,  $L_\kappa^*$ ,  $L_\psi^*$  получаются из матриц  $L_\epsilon$ ,  $L_\kappa$ ,  $L_\psi$  (2.108) путем транспонирования и замены операторов  $\nabla_1 \rightarrow (-\varphi_{21} - \nabla_1)$ , (1,2).

Матрицы  $L_\epsilon^\vee$ ,  $L_\kappa^\vee$ ,  $L_\psi^\vee$  получаются из матрицы  $L_\epsilon$ ,  $L_\kappa$ ,  $L_\psi$  путем транспонирования, замены операторов  $\nabla_1 \rightarrow l_1$  (1,2) и обнуления всех остальных коэффициентов, где  $l_i$  — косинус угла между вектором, касательным к  $\alpha_i$ -линии ( $R_{,i}$ ), и вектором внешней нормали  $v$ .

Из (2.120) следует матричное дифференциальное уравнение равновесия

$$L_\epsilon^* N + L_\kappa^* M + L_\psi^* Q - p = 0,$$

которое в развернутом виде соответствует пяти интегральным уравнениям равновесия (2.51). Шестое уравнение равновесия (уравнение моментов относительно оси  $Oz$ ) выполняется автоматически, так как при выводе использовалось условие парности касательных напряжений и учитывалось изменение метрики.

Главные граничные условия задачи могут задаваться на кинематические факторы  $u$ . Естественные (силовые) граничные условия задаются на контуре  $\Gamma_\sigma$ .

$$L_\epsilon^\vee N + L_\kappa^\vee M + L_\psi^\vee Q - \bar{p} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma.$$

В случае, если контур  $\Gamma_\sigma$  совпадает с линией  $\alpha_1 = \text{const}$  ( $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 0$ ), силовые граничные условия будут выглядеть так:

$$N_1 = \bar{N}_1; \quad N_{12} = \bar{N}_{12}; \quad Q_1 = \bar{Q}_1; \quad M_1 = \bar{M}_1; \quad M_{12} = \bar{M}_{12}.$$

Для того чтобы получить вариационную формулировку задачи в перемещениях, нужно воспользоваться уравнением

(2.119) и соотношениями упругости (2.116), (2.100). После подстановки соотношений упругости в (2.119) получим

$$\iint_S \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} dS - f(\delta u) = 0, \quad (2.121)$$

где

$$\mathcal{E} = \mathbf{L}u; \quad (2.122)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\varepsilon \\ \mathbf{L}_\kappa \\ \mathbf{L}_\phi \end{bmatrix}; \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \phi \end{bmatrix}; \quad (2.123)$$

$$u = [u_1, u_2, u, \theta_1, \theta_2]^T$$

или

$$\iint_S (\mathbf{L} \delta u)^T \mathcal{D} \mathbf{L} u dS - f(\delta u) = 0. \quad (2.124)$$

Таким образом, в варианте метода перемещений вариационная формулировка задачи статики выглядит следующим образом. Требуется найти такие функции  $u$ , для которых (2.124) выполняется при любых возможных перемещениях  $\delta u$ .

При формулировке задачи термоупругости исходная запись вариационных уравнений остается прежней (2.109), (2.110). Однако связь напряжений  $\sigma$  с деформациями следует записывать с учетом температурных составляющих (2.80)

$$\sigma = \mathbf{C}_\varepsilon \varepsilon_{(z)} - \sigma_T, \quad (2.125)$$

где компоненты вектор-столбца  $\sigma_T$  определяются в общем случае соотношениями (2.81) и считаются известными функциями аргументов  $z, \alpha_1, \alpha_2$ .

Подстановка напряжений  $\sigma$  (2.125) и деформаций  $\varepsilon_{(z)}$  (2.107) в выражения для погонных усилий  $\mathbf{N}$  и моментов  $\mathbf{M}$  (2.113) приводит к следующим интегральным соотношениям термоупругости:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}_\varepsilon + \mathbf{C}_\kappa - \mathbf{N}_T; \\ \mathbf{M} &= \mathbf{C}_\varepsilon + \mathbf{D}_\kappa - \mathbf{M}_T; \end{aligned} \quad (2.126)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_T &= \int_{-e}^s \mathbf{f}_\varepsilon^T \sigma_T \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz; \\ \mathbf{M}_T &= \int_{-e}^s \mathbf{f}_\varepsilon^T \sigma_T z \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz. \end{aligned}$$

В результате интегрирования по аргументу  $z$  уравнений (2.109), (2.110) получим последовательно уравнения (2.114) и (2.119), где под  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}$  понимается их представление согласно

(2.126). В окончательном виде вариационная формулировка задачи термоупругости многослойной оболочки будет весьма похожа на формулировку задачи статики (2.121) или (2.124). Отличие будет заключаться в том, что в линейный функционал кроме внешних сил войдут также температурные составляющие  $\mathbf{N}_T$  и  $\mathbf{M}_T$ , т. е.

$$\iint_S \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} dS - f_T(\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (2.127)$$

где

$$\begin{aligned} f_T(\delta \mathbf{u}) &= f(\delta \mathbf{u}) + \iint_S (\delta \varepsilon^T \mathbf{N}_T + \delta \kappa^T \mathbf{M}_T) dS = \\ &= f(\delta \mathbf{u}) + \iint_S ((\mathbf{L}_\varepsilon \delta \mathbf{u})^T \mathbf{N}_T + (\mathbf{L}_\kappa \delta \mathbf{u})^T \mathbf{M}_T) dS, \end{aligned} \quad (2.128)$$

$f(\delta \mathbf{u})$  представляет линейный функционал работы внешних сил (2.118); под обобщенными деформациями  $\mathcal{E}$  понимается их представление через перемещения (2.122);  $\delta \mathcal{E} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}$ .

Дифференциальные уравнения равновесия для многослойной оболочки в случае совместного силового и температурного нагружения можно записать через перемещения следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{L}_\varepsilon^* \mathbf{B} \mathbf{L}_\varepsilon + \mathbf{L}_\varepsilon^* \mathbf{C} \mathbf{L}_\kappa + \mathbf{L}_\kappa^* \mathbf{C} \mathbf{L}_\varepsilon + \mathbf{L}_\kappa^* \mathbf{D} \mathbf{L}_\kappa + \mathbf{L}_\psi^* \mathbf{K} \mathbf{L}_\psi) \mathbf{u} - \\ &-\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{L}_\varepsilon^* \mathbf{N}_T - \mathbf{L}_\kappa^* \mathbf{M}_T = 0. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Естественные (силовые) граничные условия, записанные через перемещения, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{L}_\varepsilon^v \mathbf{B} \mathbf{L}_\varepsilon + \mathbf{L}_\varepsilon^v \mathbf{C} \mathbf{L}_\kappa + \mathbf{L}_\kappa^v \mathbf{C} \mathbf{L}_\varepsilon + \mathbf{L}_\kappa^v \mathbf{D} \mathbf{L}_\kappa + \mathbf{L}_\psi^v \mathbf{K} \mathbf{L}_\psi) \mathbf{u} - \\ &-\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{L}_\varepsilon^v \mathbf{N}_T - \mathbf{L}_\kappa^v \mathbf{M}_T = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Таким образом, специфика учета нагрева многослойных оболочек отражается в формулировках задач (2.127) и (2.129), (2.130) присутствием приведенных грузовых членов  $\mathbf{N}_T$  и  $\mathbf{M}_T$ , характеризующих линейное расширение материала.

#### 2.5.4. Линеаризованные формулировки и задачи устойчивости

Для решения нелинейной задачи о больших перемещениях многослойной оболочки воспользуемся итерационным процессом, основанным на линеаризованной формулировке принципа возможных перемещений (1.133), записанной относительно исходного координатного базиса. Для рассматриваемого случая будем иметь

$$\iiint_V (\delta \Delta \varepsilon_{(z)}^T C_e \Delta \varepsilon_{(z)} + \delta \Delta \gamma_{(z)}^T C_\gamma \Delta \gamma_{(z)} + \delta \Delta \eta^T \sigma_\tau + \\ + \delta \Delta \varepsilon_{(z)}^T \sigma_{(m-1)} + \delta \Delta \gamma_{(z)}^T \tau_{(m-1)}) dV - f_{\tau+\Delta\tau} (\delta \Delta u) = 0. \quad (2.131)$$

Интегрирование в (2.131) ведется по объему и поверхности, соответствующим исходной конфигурации. Для того чтобы получить выражения для линейаризованных  $\Delta \varepsilon_{(z)}$ ,  $\Delta \gamma_{(z)}$  и нелинейных  $\Delta \eta$  составляющих приращений деформаций, рассмотрим нелинейные деформационные соотношения, соответствующие модели многослойной оболочки. Воспользуемся квадратичным представлением относительных удлинений и углов сдвигов (2.38)

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_{11(z)} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{11(z)}^2 + \varepsilon_{12(z)}^2 + \varepsilon_{13(z)}^2), \quad (1, 2); \\ e_{12} &= \varepsilon_{12(z)} + \varepsilon_{21(z)} + \varepsilon_{11(z)} \varepsilon_{21(z)} + \varepsilon_{12(z)} \varepsilon_{22(z)} + \varepsilon_{13(z)} \varepsilon_{23(z)}; \\ e_{31} &= \varepsilon_{13(z)} + \varepsilon_{31(z)} + \varepsilon_{31(z)} \varepsilon_{11(z)} + \varepsilon_{32(z)} \varepsilon_{12(z)} + \\ &+ \varepsilon_{33(z)} \varepsilon_{13(z)}, \quad (1, 2); \\ e_3 &= \varepsilon_{33(z)} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{33(z)}^2 + \varepsilon_{31(z)}^2 + \varepsilon_{32(z)}^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{1,1} + \Phi_{12} v_2 + k_1 v_3 \right), \quad (1, 2); \\ \varepsilon_{12(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{2,1} - \Phi_{12} v_1 \right), \quad (1, 2); \\ \varepsilon_{13(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \frac{1}{A_1} v_{3,1} - k_1 v_1 \right), \quad (1, 2); \\ \varepsilon_{31(z)} &= v_{1,3} \quad (1, 2); \quad \varepsilon_{33} = v_{3,3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

Будем считать, что деформирование многослойной оболочки происходит без поперечных деформаций растяжения — сжатия ( $e_3=0$ ). Для учета деформаций поперечных сдвигов ограничимся линейным приближением  $e_{31} = \varepsilon_{13(z)} + \varepsilon_{31(z)}$  (1,2), поскольку эти деформации не являются основными, а только уточняют классическую теорию оболочек. Основные деформации  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_{12}$  будем считать малыми, поэтому произведениями  $\varepsilon_{11(z)}$ ,  $\varepsilon_{22(z)}$ ,  $\varepsilon_{12(z)}$ ,  $\varepsilon_{21(z)}$  можно пренебречь. С учетом сделанных замечаний для многослойной оболочки вместо деформационных соотношений (2.132) можно воспользоваться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_{11(z)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{13(z)}^2 \quad (1, 2); \\ e_{12} &= \varepsilon_{12(z)} + \varepsilon_{21(z)} + \varepsilon_{13(z)} \varepsilon_{23(z)}; \\ e_{31} &= \varepsilon_{13(z)} + \varepsilon_{31(z)} \quad (1, 2); \quad e_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.134)$$



Для несжимаемого многослойного пакета при линейном распределении касательных перемещений (2.90) можно воспользоваться выражениями (2.133) и выразить деформации (2.134) через перемещения

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{A_1}{H_1} \left( \varepsilon_1 + z\kappa_1 + \frac{1}{2} \omega_1^2 \right), \quad (1, 2); \\ e_{12} &= \frac{A_1}{H_1} \left( \varepsilon_{12} + z\kappa_{12} + \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 \right) + \frac{A_2}{H_2} \left( \varepsilon_{21} + z\kappa_{21} + \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 \right); \quad (2.135) \\ e_{31} &= \frac{A_1}{H_1} \psi_1 \quad (1, 2); \quad e_3 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \theta_1 + \frac{1}{A_1} w_{,1} - k_1 u_1, \quad (1, 2); \\ \omega_1 &= -\frac{1}{A_1} w_{,1} + k_1 u_1, \quad (1, 2); \end{aligned}$$

При получении (2.135) в нелинейных составляющих были отброшены слагаемые, содержащие множители  $k_1 z$ ,  $k_2 z$ . На основе (2.135) можно получить линеаризованные соотношения

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{1(z)} &= \frac{A_1}{H_1} (\Delta \varepsilon_1 + z \Delta \kappa_1), \quad (1, 2); \\ \Delta \gamma_{12(z)} &= \frac{A_1}{H_1} (\Delta \varepsilon_{12} + z \Delta \kappa_{12}) + \frac{A_2}{H_2} (\Delta \varepsilon_{21} + z \Delta \kappa_{21}); \quad (2.136) \\ \Delta \gamma_{31(z)} &= \frac{A_1}{H_1} \Delta \psi_1, \quad (1, 2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \Delta u_{1,1} + \varphi_{12} \Delta u_2 + k_1 \Delta w + \omega_1^\tau \left( -\frac{1}{A_1} \Delta w_{,1} + k_1 \Delta u_1 \right), \quad (1, 2); \\ \Delta \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_1} \Delta u_{2,1} - \varphi_{12} \Delta u_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \omega_1^\tau \left( -\frac{1}{A_2} \Delta w_{,2} + k_2 \Delta u_2 \right) + \frac{1}{2} \omega_2^\tau \left( -\frac{1}{A_1} \Delta w_{,1} + k_1 \Delta u_1 \right), \quad (1, 2); \\ \Delta \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \Delta \theta_{1,1} + \varphi_{12} \Delta \theta_2, \quad (1, 2); \quad (2.137) \\ \Delta \kappa_{12} &= \frac{1}{A_1} \Delta \theta_{2,1} - \varphi_{12} \Delta \theta_1, \quad (1, 2); \\ \Delta \psi_1 &= \Delta \theta_1 + \frac{1}{A_1} \Delta w_{,1} - \Delta k_1 \Delta u_1 \quad (1, 2); \end{aligned}$$

$\omega_1^\tau$ ;  $\omega_2^\tau$ —углы поворота нормали к базовой поверхности в момент нагружения, соответствующий условному времени  $\tau$ . В матричном виде выражения (2.136), (2.137) будут записываться так:

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{(z)} &= f_{\varepsilon} (\Delta \varepsilon + z \Delta \varkappa); \\
\Delta \Upsilon_{(z)} &= f_{\Upsilon} \Delta \psi; \\
\Delta \varepsilon &= L_{\varepsilon \tau} \Delta u; \quad \Delta \varkappa = L_{\varkappa} \Delta u; \quad \Delta \psi = L_{\psi} \Delta u,
\end{aligned}
\tag{2.138}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{(z)} &= [\Delta \varepsilon_{1(z)}, \Delta \varepsilon_{2(z)}, \Delta \Upsilon_{12(z)}]^T; \quad \Delta \Upsilon_{(z)} = [\Delta \Upsilon_{31(z)}, \Delta \Upsilon_{32(z)}]^T; \\
L_{\varepsilon \tau} &= \begin{bmatrix} \nabla_1 + \omega_1^T k_1 & \varphi_{12} & k_1 - \omega_1^T \nabla_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \nabla_2 + \omega_2^T k_2 & k_2 - \omega_2^T \nabla_2 & 0 & 0 \\ -\varphi_{12} + \frac{1}{2} \omega_2^T k_1 & \nabla_1 + \frac{1}{2} \omega_1^T k_2 & -\frac{1}{2} (\omega_1^T \nabla_2 + \omega_2^T \nabla_1) & 0 & 0 \\ \nabla_2 + \frac{1}{2} \omega_2^T k_1 & -\varphi_{21} + \frac{1}{2} \omega_1^T k_2 & -\frac{1}{2} (\omega_2^T \nabla_1 + \omega_1^T \nabla_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\nabla_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \quad (1, 2); \\
\Delta \varepsilon &= [\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2, \Delta \varepsilon_{12}, \Delta \varepsilon_{21}]^T; \\
\Delta \varkappa &= [\Delta \varkappa_1, \Delta \varkappa_2, \Delta \varkappa_{12}, \Delta \varkappa_{21}]^T; \\
\Delta \psi &= [\Delta \psi_1, \Delta \psi_2]^T; \\
\Delta u &= [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta w, \Delta \theta_1, \Delta \theta_2]^T.
\end{aligned}$$

Остальные матрицы определены для соотношений (2.107), (2.108).

С учетом (2.138) два первых слагаемых в линейризованной формулировке (2.131) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (\delta \Delta \varepsilon_{(z)}^T C_e \Delta \varepsilon_{(z)} + \delta \Delta \Upsilon_{(z)}^T C_{\Upsilon} \Delta \Upsilon_{(z)}) dV = \\
&= \iint_S \delta \Delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \Delta \mathcal{E} dS,
\end{aligned}
\tag{2.139}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E} &= \mathcal{L}_{\tau} \Delta u; \\
\Delta \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \varkappa \\ \Delta \psi \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}_{\tau} = \begin{bmatrix} L_{\varepsilon \tau} \\ L_{\varkappa} \\ L_{\psi} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Третье слагаемое в (2.131) также удобно представить в билинейной форме с симметричной матрицей. Для этого выделим из полных деформаций нелинейные составляющие  $\Delta \eta$ :

$$\Delta \eta = [\Delta \eta_1, \Delta \eta_2, \Delta \chi_{12}]^T,$$

где

$$\Delta \eta_1 = \frac{A_1}{H_1} \frac{1}{2} \Delta \omega_1^2, \quad (1, 2);$$

$$\Delta\chi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{H_1} + \frac{A_2}{H_2} \right) \Delta\omega_1 \Delta\omega_2.$$

Вариации нелинейных составляющих будут

$$\delta\Delta\eta = [\delta\Delta\eta_1, \delta\Delta\eta_2, \delta\Delta\chi_{12}]^T, \quad (2.140)$$

где

$$\delta\Delta\eta_1 = \frac{A_1}{H_1} \Delta\omega_1 \delta\Delta\omega_1, \quad (1, 2);$$

$$\delta\Delta\chi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{H_1} + \frac{A_2}{H_2} \right) (\Delta\omega_1 \delta\Delta\omega_2 + \Delta\omega_2 \delta\Delta\omega_1).$$

Тогда с учетом (2.140) можно выполнить следующие преобразования:

$$\iiint_V \delta\Delta\eta^T \sigma_\tau dV = \iint_S \delta\Delta\omega^T N_\tau \Delta\omega dS, \quad (2.141)$$

где

$$\Delta\omega = I\Delta u;$$

$$\Delta\omega = [\Delta\omega_1, \Delta\omega_2]^T;$$

$$I = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -\nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -\nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_\tau = [\sigma_{1\tau}, \sigma_{2\tau}, \sigma_{12\tau}]^T;$$

$$N_\tau = \begin{bmatrix} N_{1\tau} & \overline{N}_{12\tau} \\ \overline{N}_{12\tau} & N_{2\tau} \end{bmatrix};$$

$$N_{1\tau} = \int_{-e}^s \sigma_{1\tau} \frac{H_2}{A_2} dz, \quad (1, 2);$$

$$\overline{N}_{12\tau} = \frac{1}{2} (N_{12\tau} + N_{21\tau});$$

$$N_{12\tau} = \int_{-e}^s \sigma_{12\tau} \frac{H_2}{A_2} dz, \quad (1, 2).$$

Работу внутренних сил запишем с учетом (2.138), (2.113)

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\delta\Delta\varepsilon^T \sigma_{(m-1)} + \delta\Delta\gamma^T \tau_{(m-1)}) dV = \\ & = \iint_S \delta\Delta\varepsilon^T N_{(m-1)} + \delta\Delta\kappa^T M_{(m-1)} + \delta\Delta\psi^T Q_{(m-1)} dS = \\ & = \iint_S \delta\Delta\mathcal{E}^T F_{(m-1)} dS, \end{aligned} \quad (2.142)$$

где

$$\Delta \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \kappa \\ \Delta \phi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{(m-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{(m-1)} \\ \mathbf{M}_{(m-1)} \\ \mathbf{Q}_{(m-1)} \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{L}_\tau \Delta \mathbf{u}.$$

Для случая «мертвых» сил линейный функционал  $f_{\tau+\Delta\tau}(\delta\Delta\mathbf{u})$  будет иметь вид, аналогичный (2.118)

$$f_{\tau+\Delta\tau}(\delta\Delta\mathbf{u}) = \iint_S \delta\Delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_{\tau+\Delta\tau} dS + \int_{\Gamma_\sigma} \delta\Delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_{\tau+\Delta\tau} d\Gamma, \quad (2.143)$$

где  $\mathbf{p}_{\tau+\Delta\tau}$  и  $\bar{\mathbf{p}}_{\tau+\Delta\tau}$  — внешние распределенные силы, соответствующие условному моменту времени нагружения  $\tau + \Delta\tau$ .

В окончательном виде вариационная формулировка линеаризованной задачи записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \iint_S (\delta\Delta\mathcal{E}^T \mathcal{D}\Delta\mathcal{E} + \delta\Delta\omega^T \mathbf{N}_\tau \Delta\omega + \delta\Delta\mathcal{E}^T \mathbf{F}_{(m-1)}) dS = \\ = f_{\tau+\Delta\tau}(\delta\Delta\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.144)$$

где  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{L}_\tau \Delta\mathbf{u}$ ;  $\Delta\omega = \mathbf{I}\Delta\mathbf{u}$ .

Вариационная формулировка (2.144) позволяет получить разрешающие уравнения относительно приращений  $\Delta\mathbf{u}$  и выполнить очередную итерацию  $\mathbf{u}_{(m)} = \mathbf{u}_{(m-1)} + \Delta\mathbf{u}$ . Уравнение (2.144) можно также использовать для анализа смежного равновесного состояния, т. е. для решения задачи устойчивости. Если считать, что итерация  $(m-1)$  соответствует равновесному состоянию для момента нагружения  $\tau$  и процесс дальнейшего деформирования происходит без приращения нагрузки, то, очевидно, следует потребовать

$$\iint_S \delta\Delta\mathcal{E}^T \mathbf{F}_{(m-1)} dS = f_\tau(\delta\Delta\mathbf{u}).$$

Тогда условие смежного равновесного состояния примет вид

$$\iint_S (\delta\Delta\mathcal{E}^T \mathcal{D}\Delta\mathcal{E} + \delta\Delta\omega^T \mathbf{N}_\tau \Delta\omega) dS = 0. \quad (2.145)$$

В случае, если состояние системы для момента времени  $\tau$  считается напряженным, но недеформированным, то вместо  $\Delta\mathcal{E}$ ,  $\Delta\omega$  можно пользоваться обычными линейными представлениями, и вариационная формулировка задачи устойчивости (2.145) может быть представлена так:

$$\iint_S (\delta\mathcal{E}^T \mathcal{D}\mathcal{E} + \delta\omega^T \mathbf{N} \omega) dS = 0, \quad (2.146)$$

где  $\mathcal{E} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ ,  $\omega = \mathbf{I}\mathbf{u}$ .

Формулировка задачи устойчивости в виде (2.146) известна как энергетический критерий в форме Брайана [1].

## 2.6. ПРИМЕРЫ

**Пример 2.1.** Составить подпрограмму определения геометрических характеристик конических и торовых оболочек.

В качестве исходных параметров примем:

$N$  — суммарное число оболочек в конструкции;  $I$  — номер оболочки в конструкции;  $IT$  — тип оболочки. Если  $IT=1$ , то оболочка с номером  $I$  — конус, если  $IT=2$  — эллиптический тор;  $X$  — текущая координата  $\alpha_1$  для конуса совпадает с  $s$  (рис. 2.3)/;  $GEM(5, N)$  — массив исходной информации по геометрии оболочек. В  $I$ -м столбце массива  $GEM$  хранится следующая исходная информация

| Условия                                | $GEM(1, I)$   | $GEM(2, I)$        | $GEM(3, I)$ | $GEM(4, I)$ | $GEM(5, I)$ |
|----------------------------------------|---------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|
| Если $I$ -я оболочка конус             | 0             | $l$                | $r_0$       | $\theta_0$  | 0           |
| Если $I$ -я оболочка эллиптический тор | $\alpha_{10}$ | $\alpha_{1\Delta}$ | $a$         | $b$         | $d$         |

Здесь  $l$  — длина образующей конуса (рис. 2.3);  $r_0$  — радиус параллели при  $s=0$ ;  $\theta_0$  (рад) — угол между нормалью к образующей  $N$  и осью вращения  $t$ ;  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{1\Delta}$  — начальная и конечная координаты  $\alpha_1$  (рад) эллиптического тора (рис. 2.4);  $a$ ,  $b$ ,  $d$  — параметры эллиптического тора.

Выходные параметры обозначим следующими идентификаторами:  $A1$ ,  $A2$  — параметры Ламе  $A_1$ ,  $A_2$ ;  $RK1$ ,  $RK2$  — кривизны  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $F21$  — параметр  $\varphi_{21}$ ;  $TET$  — угол наклона нормали к оси вращения. Для вычисления геометрических характеристик используются соотношения (2.23), (2.24).

Текст подпрограммы GEOM

SUBROUTINE GEOM (N, I, IT, X, GEM, A1, A2, RK1, RK2, F21, TET)  
DIMENSION GEM(5, N)

GO TO (1, 2), IT

1.  $TET = GEM(4, I)$

$C = \cos(TET)$

$A1 = 1.$

$A2 = GEM(3, I) + X * C$

$RK1 = 0.$

$RK2 = \sin(TET)/A2$

$F21 = C/A2$

RETURN

2.  $A = GEM(3, I)$

$B = GEM(4, I)$

$D = GEM(5, I)$

$S = \sin(X)$

$C = \cos(X)$

$T = \sqrt{(A * S)^2 + (B * C)^2}$

$A1 = (A * B / T)^2 / C$

$RK1 = 1/A1$

$A2 = D + A * S / T$

$RK2 = S/A2$

$F21 = C/A2$

$TET = X$

RETURN  
END

**Пример 2.2.** Составить подпрограмму определения коэффициентов матрицы приведенных жесткостей  $\mathcal{D}$  для многослойного пакета, составленного из различных слоев ортотропных материалов (рис. 2.14).

Представим основные аналитические соотношения, необходимые для проведения расчетов.

Для записи соотношений упругости в осях ортотропии материала (2.71) необходимо вычислить коэффициенты

$$c'_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (1, 2); \quad c'_{12} = c'_{11}\nu_{21}; \quad (2.147)$$

$$c'_{44} = G_{12}; \quad c'_{66} = G_{31}; \quad c'_{55} = G_{32}.$$

Для слоя, образованного равномерной укладкой с армированием  $\pm\varphi$  (рис. 2.14), коэффициенты упругости пересчитываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= c'_{11}c^4 + c'_{22}s^4 + 2(c'_{12} + 2c'_{44})s^2c^2; \quad (1, 2) \\ c_{12} &= c'_{12}(c^4 + s^4) + (c'_{11} + c'_{22} - 4c'_{44})s^2c^2; \\ c_{44} &= (c'_{11} - 2c'_{12} + c'_{22})s^2c^2 + c'_{44}(c^2 - s^2)^2; \\ c_{66} &= c'_{55}s^2 + c'_{66}c^2; \\ c_{55} &= c'_{55}c^2 + c'_{66}s^2; \\ c_{14} &= c_{24} = c_{36} = 0; \\ c_{ij} &= c_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (2.148)$$

где  $c = \cos \varphi$ ;  $s = \sin \varphi$ .

Матрица приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$  связывает погонные усилия и моменты с обобщенными деформациями

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \mathcal{D} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \phi \end{bmatrix}.$$

где

$$N = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}]^T; \quad M = [M_1, M_2, M_{12}, M_{21}]^T;$$

$$Q = [Q_1, Q_2]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}]^T; \quad \kappa = [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}]^T;$$

$$\psi = [\psi_1, \psi_2]^T$$

В развернутом виде матрица  $\mathcal{D}$  имеет следующую структуру:

$$\mathcal{D} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cc} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{34} & B_{44} & 0 & 0 & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ \hline G_{11} & C_{12} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & G_{34} & 0 & 0 & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 & D_{34} & D_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{22} \end{array} \right]$$

Согласно соотношениям (2.117), (2.103) коэффициенты матрицы  $\mathcal{D}$  для многослойных оболочек вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \sum_{i=1}^k c_{11}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; & B_{12} &= \sum_{i=1}^k c_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; & B_{22} &= \sum_{i=1}^k c_{22}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_1^{[i]}, \\
 B_{33} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; & B_{34} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} t_1^{[i]}; & B_{44} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_1^{[i]}, \\
 C_{11} &= \sum_{i=1}^k c_{11}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_2^{[i]}; & C_{12} &= \sum_{i=1}^k c_{12}^{[i]} t_2^{[i]}; & C_{22} &= \sum_{i=1}^k c_{22}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_2^{[i]}, \\
 C_{33} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_2^{[i]}; & C_{34} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} t_2^{[i]}; & C_{44} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_2^{[i]}, \\
 D_{11} &= \sum_{i=1}^k c_{11}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_3^{[i]}; & D_{12} &= \sum_{i=1}^k c_{12}^{[i]} t_3^{[i]}; & D_{22} &= \sum_{i=1}^k c_{22}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_3^{[i]}, \\
 D_{33} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_3^{[i]}; & D_{34} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} t_3^{[i]}; & D_{44} &= \sum_{i=1}^k c_{44}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_3^{[i]}, \\
 K_{11} &= h^2 \left[ \sum_{i=1}^k \frac{H_{21}^{[i]} t_1^{[i]}}{c_{66}^{[i]}} \right]^{-1}; & K_{22} &= h^2 \left[ \sum_{i=1}^k \frac{H_{12}^{[i]} t_1^{[i]}}{c_{55}^{[i]}} \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

где

$$H_{12}^{[i]} = \frac{1 + k_2 t_{[i]}}{1 + k_1 t_{[i]}}; \quad (1, 2); \quad t_{[i]} = 0,5 (z_{(i)} + z_{(i-1)});$$

$$t_1^{[i]} = z_{(i)} - z_{(i-1)}; \quad t_2^{[i]} = 0,5 (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2); \quad t_3^{[i]} = (z_{(i)}^3 - z_{(i-1)}^3)/3;$$

$k$  — число слоев в многослойной оболочке;  $z_{(i-1)}$ ,  $z_{(i)}$  — нормальные координаты  $z$  внутренней и внешней поверхностей  $i$ -го слоя;  $z_{(0)} = -e$  — координата  $z$  внутренней поверхности оболочки;  $k_1$ ,  $k_2$  — главные кривизны оболочки;  $h$  — толщина многослойной оболочки.

В качестве исходных данных примем:

RK1, RK2 — главные кривизны оболочки  $k_1$ ,  $k_2$ ; KSL — число слоев в оболочке  $k$ ; CC(7, KSL) — массив технических констант упругости слоев оболочки.

В  $i$ -м столбце массива последовательно размещается следующая информация для  $i$ -го слоя.

| 1           | 2           | 3              | 4              | 5              | 6                | 7                |
|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|------------------|------------------|
| $E_1^{[i]}$ | $E_2^{[i]}$ | $G_{12}^{[i]}$ | $G_{31}^{[i]}$ | $G_{32}^{[i]}$ | $\nu_{12}^{[i]}$ | $\nu_{21}^{[i]}$ |

Нумерация слоев дана от внутреннего слоя к внешнему; H(KSL) — массив, содержащий толщины слоев; F(KSL) — массив, содержащий углы укладки слоев (рад); E — расстояние  $e$  от координатной поверхности до внутренней поверхности оболочки.

В результате работы подпрограммы DKSL в массиве D(10, 10) будут содержаться коэффициенты матрицы приведенных жесткостей  $\mathcal{D}$ .

Текст подпрограммы DKSL

SUBROUTINE DKSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, D)

DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), D(10, 10)

DO 1 I=1, 10

DO 1 J=1, 10

1 D(I, J)=0.

Z1=-E

DO 2 I=1, KSL

T=1.-CC(6, I)\*CC(7, I)

C11=CC(1, I)/T

C22=CC(2, I)/T

C12=C11\*CC(7, I)

C44=CC(3, I)

C55=CC(5, I)

C66=CC(4, I)

F1=F(I)

T=COS(F1)

C2=T\*T

T=SIN(F1)

S2=T\*T

C4=C2\*C2

S4=S2\*S2

S2C2=S2\*C2

T=2.\*(C12+2.\*C44)\*S2C2

CC11=C11\*C4+C22\*S4+T

CC22=C22\*C4+C11\*S4+T

CC12=C12\*(C4+S4)+(C11+C22-4.\*C44)\*S2C2

CC44=(C11-2.\*C12+C22)\*S2C2+C44\*(C2-S2)\*\*2

CC66=C66\*C2+C55\*S2

CC55=C55\*C2+C66\*S2

Z2=Z1+H(I)

T1=H(I)

T2=0.5\*(Z2\*\*2-Z1\*\*2)

T3=(Z2\*\*3-Z1\*\*3)/3.

T=0.5\*(Z1+Z2)

H12=(1.+RK2\*T)/(1.+RK1\*T)

H21=1/H12

D(1,1)=D(1,1)+CC11\*H12\*T1

D(1,2)=D(1,2)+CC12\*T1

D(2,2)=D(2,2)+CC22\*H21\*T1

D(3,3)=D(3,3)+CC44\*H12\*T1

D(3,4)=D(3,4)+CC44\*T1

D(4,4)=D(4,4)+CC44\*H21\*T1

D(1,5)=D(1,5)+CC11\*H12\*T2

D(1,6)=D(1,6)+CC12\*T2

D(2,6)=D(2,6)+CC22\*H21\*T2

D(3,7)=D(3,7)+CC44\*H12\*T2

D(3,8)=D(3,8)+CC44\*T2

D(4,8)=D(4,8)+CC44\*H21\*T2

D(5,5)=D(5,5)+CC11\*H12\*T3

D(5,6)=D(5,6)+CC12\*T3

D(6,6)=D(6,6)+CC22\*H21\*T3

D(7,7)=D(7,7)+CC44\*H12\*T3

D(7,8)=D(7,8)+CC44\*T3

D(8,8)=D(8,8)+CC44\*H21\*T3

D(9,9)=D(9,9)+H21\*T1/CC66

D(10,10)=D(10,10)+H12\*T1/CC55

2 Z1=Z2

D(2,1)=D(1,2)

D(4,3)=D(3,4)

D(2,5)=D(1,6)

D(4,7)=D(3,8)



```

D(6,5)=D(5,6)
D(8,7)=D(7,8)
D(5,1)=D(1,5)
D(5,2)=D(2,5)
D(6,1)=D(1,6)
D(6,2)=D(2,6)
D(7,3)=D(3,7)
D(7,4)=D(4,7)
D(8,3)=D(3,8)
D(8,4)=D(4,8)
A=Z1+E
D(9,9)=A*A/D(9,9)
D(10,10)=A*/D(10,10)
RETURN
END

```

В качестве примера расчета дадим оценку приведенных жесткостных характеристик многослойных пластин, состоящих из  $k$  слоев, каждый из которых образован перекрестной укладкой  $[\pm\varphi_{[i]}]$  однонаправленного композита. Суммарная толщина всех слоев в пластине равна  $h$ .

Для приближенной оценки мембранных, смешанных и изгибных жесткостных характеристик воспользуемся упрощенной нитяной моделью однонаправленного материала. В этом случае принято считать, что слой однонаправленного композита обладает жесткостью только вдоль волокон ( $E_1 = E \neq 0$ ;  $E_2 = G_{12} = 0$ ;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$ ). Согласно (2.147) — (2.149) и сделанным выше допущениям получим следующие выражения.

Для мембранных жесткостей:

$$B_{11} = Eh \sum_{i=1}^k \bar{t}_1^{[i]} \cos^4 \varphi_{[i]}; \quad B_{22} = Eh \sum_{i=1}^k \bar{t}_1^{[i]} \sin^4 \varphi_{[i]};$$

$$B_{12} = B_{33} = B_{34} = B_{44} = Eh \sum_{i=1}^k \bar{t}_1^{[i]} \sin^2 \varphi_{[i]} \cos^2 \varphi_{[i]},$$

где

$$\bar{t}_1^{[i]} = (z_{(i)} - z_{(i-1)})/h.$$

Для смешанных жесткостей:

$$C_{11} = Eh^2 \sum_{i=1}^k \bar{t}_2^{[i]} \cos^4 \varphi_{[i]}; \quad C_{22} = Eh^2 \sum_{i=1}^k \bar{t}_2^{[i]} \sin^4 \varphi_{[i]};$$

$$C_{12} = C_{33} = C_{34} = C_{44} = Eh^2 \sum_{i=1}^k \bar{t}_2^{[i]} \sin^2 \varphi_{[i]} \cos^2 \varphi_{[i]},$$

где

$$\bar{t}_2^{[i]} = (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2)/(2h^2).$$

Для изгибных жесткостей:

$$D_{11} = Eh^3 \sum_{i=1}^k \bar{t}_3^{[i]} \cos^4 \varphi_{[i]}; \quad D_{22} = Eh^3 \sum_{i=1}^k \bar{t}_3^{[i]} \sin^4 \varphi_{[i]};$$

$$D_{12} = D_{33} = D_{34} = D_{44} = Eh^3 \sum_{i=1}^k \bar{t}_3^{[i]} \sin^2 \varphi_{[i]} \cos^2 \varphi_{[i]},$$

где

$$\bar{t}_3^{[i]} = (z_{(i)}^3 - z_{(i-1)}^3) / (3h^3).$$

Нетрудно показать, что при переходе к новой координатной поверхности ( $z' = z - \Delta$ , где  $\Delta$  — смещение координатной поверхности вдоль оси  $Oz$ ) мембранные жесткости не изменяются  $B'_{ij} = B_{ij}$ , а новые смешанные  $C'_{ij}$  и изгибные  $D'_{ij}$  жесткости связаны со старыми жесткостями соотношениями

$$C'_{ij} = C_{ij} - \Delta B_{ij}; \quad D'_{ij} = D_{ij} - 2\Delta C_{ij} + \Delta^2 B_{ij}.$$

Минимальные значения изгибных жесткостей  $D_{ij}^*$  будут равны

$$D_{ij}^* = D_{ij} - C_{ij}^2 / B_{ij}$$

при  $\Delta = C_{ij} / B_{ij}$ . Для многослойной пластины, имеющей произвольную последовательность чередования различных ортотропных слоев, может не существовать одной координатной поверхности, относительно которой все изгибные жесткости принимают наименьшее значение.

Для многослойной пластины, имеющей структуру пакета  $[\pm\varphi]$ , получим следующие значения жесткостных характеристик, вычисленных относительно координатной поверхности, совпадающей с нижней лицевой поверхностью,

$$\begin{aligned} B_{11} &= Eh \cos^4 \varphi, \quad B_{22} = Eh \sin^4 \varphi; \\ B_{12} &= B_{33} = B_{34} = B_{44} = Eh \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ C_{11} &= \frac{Eh^2}{2} \cos^4 \varphi; \quad C_{22} = \frac{Eh^2}{2} \sin^4 \varphi; \\ C_{12} &= C_{33} = A_{34} = C_{44} = \frac{Eh^2}{2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{3} \cos^4 \varphi; \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{3} \sin^4 \varphi; \\ D_{12} &= D_{33} = D_{34} = D_{44} = \frac{Eh^3}{3} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве координатной срединную поверхность, получим

$$\begin{aligned} C_{ij}^* &= 0; \quad D_{11}^* = \frac{Eh^3}{12} \cos^4 \varphi; \quad D_{22}^* = \frac{Eh^3}{12} \sin^4 \varphi; \\ D_{12}^* &= D_{33}^* = D_{34}^* = D_{44}^* = \frac{Eh^3}{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \end{aligned}$$

соответствующие изгибные жесткости равны минимальным.

Рассмотрим многослойную пластину, имеющую структуру пакета  $[0/\pm\varphi]$ , т. е. первая половина пакета набрана слоями с укладкой  $0^\circ$ , вторая — слоями с укладкой  $\pm\varphi$ . Относительно координатной поверхности, совпадающей с нижней лицевой поверхностью, получим следующие жесткостные характеристики:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{Eh}{2} (1 + \cos^4 \varphi); \quad B_{22} = \frac{Eh}{2} \sin^4 \varphi; \\ B_{12} &= B_{33} = B_{34} = B_{44} = \frac{Eh}{2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \\ C_{11} &= \frac{Eh^2}{8} (1 + 3 \cos^4 \varphi); \quad C_{22} = \frac{3Eh^2}{8} \sin^4 \varphi; \\ C_{12} &= C_{33} = C_{34} = C_{44} = \frac{3Eh^2}{8} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \end{aligned}$$

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{24}(1 + 7 \cos^4 \varphi); \quad D_{22} = \frac{7Eh^3}{24} \sin^4 \varphi;$$

$$D_{12} = D_{33} = D_{34} = D_{44} = \frac{7Eh^3}{24} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Минимальное значение изгибной жесткости  $D_{11}^*$  будет равно

$$D_{11}^* = D_{11} - C_{11}^2/B_{11} = \frac{Eh^3}{12} \left[ \frac{1 + 7 \cos^4 \varphi}{2} - \frac{3(1 + 3 \cos^4 \varphi)^2}{8(1 + \cos^4 \varphi)} \right]$$

при

$$\Delta = h \frac{1 + 3 \cos^4 \varphi}{4(1 + \cos^4 \varphi)}.$$

Минимальные значения изгибных жесткостей  $D_{22}^*, D_{12}^*, \dots, D_{44}^*$  будут равны

$$D_{22}^* = D_{22} - C_{22}^2/B_{22} = \frac{Eh^3}{96} \sin^4 \varphi; \quad D_{12}^* = D_{33}^* = D_{34}^* = D_{44}^* = \frac{Eh^3}{96} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

при  $\Delta = 3h/4$ , т. е. при совмещении координатной поверхности со срединной поверхностью второй половины пакета, имеющей армирование с углами укладки  $\pm \varphi$ .

**Пример 2.3.** Составить подпрограмму вычисления температурных составляющих погонных усилий и моментов  $N_T$  и  $M_T$  (2.126).

Предварительно определим распределение температуры по толщине многослойного пакета. Будем считать, что неравномерность распределения температуры по поверхности оболочки незначительна и основной тепловой поток направлен вдоль нормальной координаты  $z$ . Интенсивность передачи теплоты характеризуется плотностью теплового потока  $q$ , т. е. количеством теплоты, передаваемой в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности. Связь между градиентом температуры и вектором плотности теплового потока устанавливается согласно гипотезе Фурье. Для рассматриваемого однородного случая получим

$$q = -\lambda T', \quad (2.150)$$

где  $T'$  — первая производная от  $T$  по  $z$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности (считается известной кусочно-постоянной функцией аргумента  $z$ ). Для стационарного процесса теплопроводности с учетом отсутствия внутренних источников тепла в многослойной оболочке условие баланса энергии приводит к уравнению

$$q' = 0. \quad (2.151)$$

В качестве граничных условий задачи примем заданные температуры внутренней и внешней поверхностей многослойного пакета:

$$z = -e, \quad T = T_e;$$

$$z = s, \quad T = T_s.$$

Воспользуемся интегральной формулировкой уравнения (2.150) и выполним интегрирование по частям:

$$\int_{-e}^s \delta q \left( \frac{q}{\lambda} + T' \right) dz = \int_{-e}^s \delta q \frac{q}{\lambda} dz - \int_{-e}^s \delta q' T dz + [\delta q T]_{-e}^s = 0. \quad (2.152)$$

Потребуем для функций  $\delta q$ ,  $q$  выполнения уравнения (2.151), т. е.  $\delta q' = 0$ ;  $q' = 0$ , тогда из (2.152) получим вариационную формулировку, аналогичную методу сил

$$\int_{-e}^s \delta q \frac{q}{\lambda} dz + [\delta q T]_{-e}^s = 0$$

или

$$\delta q q \sum_{i=1}^k \frac{h_{[i]}}{\lambda_{[i]}} + \delta q (T_s - T_e) = 0, \quad (2.153)$$

где  $h_{[i]}$ ,  $\lambda_{[i]}$  — толщина и коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя;  $k$  — число слоев. Уравнение (2.153) позволяет определить плотность теплового потока

$$q = \frac{T_e - T_s}{\sum_{i=1}^k \frac{h_{[i]}}{\lambda_{[i]}}}. \quad (2.154)$$

Распределение температуры по  $i$ -му слою получим интегрированием уравнения (2.150)

$$T(z) = T_{(i-1)} - \frac{q}{\lambda_{[i]}} (z - z_{(i-1)}), \quad z_{(i-1)} \leq z \leq z_{(i)}, \quad (2.155)$$

где  $T_{(i-1)}$  — температура внутренней поверхности  $i$ -го слоя; для первого слоя  $T_{(0)} = T_e$ . Положив в (2.155)  $z = z_{(i)}$ , получим температуру внешней поверхности  $i$ -го слоя

$$T_{(i)} = T_{(i-1)} - \frac{q}{\lambda_{[i]}} h_{[i]}. \quad (2.156)$$

Полученные уравнения (2.154) — (2.156) позволяют однозначно определить температурное состояние многослойного пакета.

Для ортотропного материала, образованного перекрестной укладкой с углами армирования  $\pm\varphi$ , согласно (2.81) температурные составляющие напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{1\tau} = d_{1\tau} T \quad (1, 2), \quad (2.157)$$

где

$$d_{1\tau} = c^2 (c'_{11} \alpha_1^\circ + c'_{12} \alpha_2^\circ) + s^2 (c'_{12} \alpha_1^\circ + c'_{22} \alpha_2^\circ) \quad (1, 2)$$

$$c = \cos \varphi; \quad s = \sin \varphi.$$

Средние напряжения  $\sigma_{12\tau}$  при вычислении  $N_\tau$  и  $M_\tau$  можно принять равными нулю.

Воспользовавшись выражениями для  $N_\tau$  и  $M_\tau$  (2.126), получим

$$N_\tau = [N_{1\tau}, N_{2\tau}, N_{12\tau}, N_{21\tau}]^T;$$

$$M_\tau = [M_{1\tau}, M_{2\tau}, M_{12\tau}, M_{21\tau}]^T,$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_{1\tau} &= \int_{-e}^s \sigma_{1\tau} \frac{H_2}{A_2} dz, \quad (1, 2); \\ M_{1\tau} &= \int_{-e}^s \sigma_{1\tau} \frac{H_2}{A_2} z dz, \quad (1, 2); \\ N_{12\tau} &= N_{21\tau} = M_{12\tau} = M_{21\tau} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

При вычислении интегралов (2.158) будем считать, что в пределах  $i$ -го слоя

$$\frac{H_2}{A_2} = (1 + k_2 z) \approx (1 + k_2 t_{[i]}), \quad (1, 2);$$

$$t_{[i]} = 0,5 (z_{(i-1)} + z_{(i)});$$

$$\sigma_{1\tau}^{[i]} = d_{1\tau}^{[i]} T_{[i]}. \quad (1, 2);$$

$$T_{[i]} = T_{(i-1)} - \frac{q}{\lambda_{[i]}} (z - z_{(i-1)}), \quad z_{(i-1)} \leq z \leq z_{(i)},$$

где  $q$  определяется выражением (2.154); коэффициенты  $d_{1\tau}^{[i]}$ , (1, 2);  $\lambda_{[i]}$  считаются постоянными в пределах слоя. Тогда с учетом сделанных допущений можно выполнить интегрирование (2.158) и получить

$$\left. \begin{aligned} N_{1\tau} &= \sum_{i=1}^k d_{1\tau}^{[i]} (1 + k_2 t_{[i]}) T_N^{[i]}, \quad (1, 2); \\ M_{1\tau} &= \sum_{i=1}^k d_{1\tau}^{[i]} (1 + k_2 t_{[i]}) T_M^{[i]}, \quad (1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

где

$$T_N^{[i]} = T_{(i-1)} t_1^{[i]} - q (t_2^{[i]} - z_{(i-1)} t_1^{[i]}) / \lambda_{[i]};$$

$$T_M^{[i]} = T_{(i-1)} t_2^{[i]} - q (t_3^{[i]} - z_{(i-1)} t_2^{[i]}) / \lambda_{[i]};$$

$$t_1^{[i]} = h_{[i]}, \quad t_2^{[i]} = 0,5 (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2);$$

$$t_3^{[i]} = (z_{(i)}^3 - z_{(i-1)}^3) / 3; \quad t_{[i]} = 0,5 (z_{(i-1)} + z_{(i)}).$$

В качестве исходных данных примем:

RK1, RK2, KSL, CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), E — см. описание исходных данных для подпрограммы DKSL (пример 2.2); TE, TS — температуры  $t_e$  и  $t_s$  (град. С) внутренней и внешней поверхности оболочки; BL (KSL) — массив коэффициентов теплопроводности отдельных слоев  $\lambda_{[i]}$  (нумерация слоев от внутреннего к внешнему); A (2, KSL) — массив коэффициентов линейного температурного расширения. В  $i$ -м столбце массива размещаются коэффициенты  $\alpha_1^e$  и  $\alpha_2^e$   $i$ -го слоя.

В результате работы подпрограммы TERMN в массивах TN (4), TM (4) будут располагаться коэффициенты, соответствующие вектор-столбцам  $N_\tau$ ,  $M_\tau$  (2.159).

Текст подпрограммы TERMN

SUBROUTINE TERMN (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E,

\* TE, TS, BL, A, TN, TM)

DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL),

\* BL(KSL), A(2, KSL), TN(4), TM(4)

DO 1 I=1,4

TN(I)=0.

1 TM(I)=0.

TI1=TE

HL=0.

DO 2 I=1, KSL

2 HL=HL+H(I)/BL(I)

Q=(TE-TS)/HL

Z1=-E

DO 3 I=1, KSL

T=1. -CC(6, I)\*CC(7, I)

C11=CC(1, I)/T

```

C22=CC(2, 1)/T
C12=CC(7, 1)*C11
F1=F(1)
T=COS(F1)
C2=T*T
T=SIN(F1)
S2=T*T
D1T=C2*(C11*A(1, 1)+C12*A(2, 1))+
* S2*(C12*A(1, 1)+C22*A(2, 1))
D2T=C2*(C22*A(2, 1)+C12*A(1, 1))+
* S2*(C12*A(2, 1)+C11*A(1, 1))
Z2=Z1+H(1)
T1=H(1)
T2=0.5*(Z2**2-Z1**2)
T3=(Z2**3-Z1**3)/3.
T=0.5*(Z1+Z2)
TK1=1.+RK1*T
TK2=1.+RK2*T
TTN=T11*T1-Q*(T2-Z1*T1)/BL(1)
TTM=T11*T2-Q*(T3-Z1*T2)/BL(1)
TN(1)=TN(1)+D1T*TK2*TTN
TN(2)=TN(2)+D2T*TK1*TTN
TM(1)=TM(1)+D1T*TK2*TTM
TM(2)=TM(2)+D2T*TK1*TTM
Z1=Z2
T11=T11-Q*H(1)/BL(1)
3 CONTINUE
RETURN
END

```

В качестве примера рассмотрим однородную многослойную пластину, образованную перекрестной укладкой однонаправленных слоев композита  $[\pm\varphi]$ . За координатную поверхность ( $z=0$ ) примем нижнюю лицевую поверхность. Рассмотрим случай, когда  $\alpha_1^0=0$ ;  $\alpha_2^0 \neq 0$ . Тогда коэффициенты  $d_{1T}$ ,  $d_{2T}$  /см. (2.157)/ будут равны

$$d_{1T} = \frac{E_2 \alpha_2^0}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\nu_{12} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);$$

$$d_{2T} = \frac{E_2 \alpha_2^0}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\nu_{12} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi).$$

Плотность теплового потока  $q = (T_e - T_s) \lambda / h$ ;  $z_{(0)} = 0$ ;  $z_{(1)} = h$ , и согласно (2.159) получим

$$N_{1T} = \frac{E_2 h \alpha_2^0}{2(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (T_e + T_s) (\nu_{12} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);$$

$$N_{2T} = \frac{E_2 h \alpha_2^0}{2(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (T_e + T_s) (\nu_{12} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi);$$

$$M_{1T} = \frac{E_2 h^2 \alpha_2^0}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left( \frac{T_e}{6} + \frac{T_s}{3} \right) (\nu_{12} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);$$

$$M_{2T} = \frac{E_2 h^2 \alpha_2^0}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left( \frac{T_e}{6} + \frac{T_s}{3} \right) (\nu_{12} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi).$$

Если в качестве координатной принять срединную поверхность пластины ( $z_{(0)} = -h/2$ ;  $z_{(1)} = h/2$ ), то температурные составляющие погонных усилий  $N_{1T}$ ,  $N_{2T}$  останутся без изменений, а температурные составляющие погонных моментов  $M_{1T}$ ,  $M_{2T}$  будут определяться выражениями

$$M_{1T} = \frac{E_2 h^2 \alpha_2^0}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (T_s - T_e) (\nu_{12} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);$$

$$M_{2T} = \frac{E_2 k^2 \alpha_2^0}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} (T_s - T_e) (\nu_{12} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi).$$

**Пример 2.4.** Составим подпрограмму определения напряжений в отдельных слоях многослойного пакета. Будем считать, что нам известны: геометрические и механические характеристики многослойного пакета; температуры на лицевых поверхностях; коэффициенты теплопроводности, а также обобщенные деформации ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \psi_1, \psi_2$ ).

Предварительно представим аналитические соотношения, необходимые для проведения расчета.

Тепловой поток через многослойную стенку  $q$  будет определяться согласно (2.154). Температура внешней поверхности  $i$ -го слоя  $T_{(i)}$  определяется выражением (2.156).

Для определения деформаций  $\varepsilon_{1(z)}, \varepsilon_{2(z)}, \gamma_{12(z)}$  в слое с координатой  $z(z_{(i-1)} \leq z \leq z_{(i)})$  воспользуемся соотношениями (2.91)

$$\varepsilon_{1(z)} = \frac{1}{1 + k_1 z} (\varepsilon_1 + z \kappa_1), \quad (1, 2);$$

$$\gamma_{12(z)} = \frac{1}{1 + k_1 z} (\varepsilon_{12} + z \kappa_{12}) + \frac{1}{1 + k_2 z} (\varepsilon_{21} + z \kappa_{21}).$$

Далее выполним преобразования, связанные с переходом от системы координат оболочки к системе координат слоя. Для ортотропного слоя, образованного из однонаправленного материала с углами армирования  $[\pm \varphi]$  (рис. 2.14), согласно (2.72) запишем:

$$\varepsilon'_{1(z)} = \varepsilon_{1(z)} c^2 + \varepsilon_{2(z)} s^2 \pm \gamma_{12(z)} s c;$$

$$\varepsilon'_{2(z)} = \varepsilon_{1(z)} s^2 + \varepsilon_{2(z)} c^2 \mp \gamma_{12(z)} s c;$$

$$\gamma'_{12(z)} = \mp \varepsilon_{1(z)} 2 s c \pm \varepsilon_{2(z)} 2 s c + \gamma_{12(z)} (c^2 - s^2),$$

где  $s = \sin |\varphi|$ ,  $c = \cos |\varphi|$ , верхний знак соответствует углу армирования  $+\varphi$ , нижний знак соответствует углу армирования  $-\varphi$ .

Напряжения в слое (определенные в системе координат слоя) вычислим, используя соотношения упругости (2.79)

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= c'_{11} \varepsilon'_{1(z)} + c'_{12} \varepsilon'_{2(z)} - T (c'_{11} \alpha_1^0 + c'_{12} \alpha_2^0); \\ \sigma'_2 &= c'_{12} \varepsilon'_{1(z)} + c'_{22} \varepsilon'_{2(z)} - T (c'_{12} \alpha_1^0 + c'_{22} \alpha_2^0); \\ \sigma'_{12} &= c'_{44} \gamma'_{12(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.160)$$

здесь

$$c'_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (1, 2); \quad c'_{12} = c'_{11} \nu_{21}; \quad c'_{44} = G_{12}.$$

где для  $i$ -го слоя  $T = T_{(i-1)}$  для внутренней поверхности ( $z = z_{(i-1)}$ ) и  $T = T_{(i)}$  для наружной поверхности ( $z = z_{(i)}$ ),  $\alpha_1^0$  — коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР) однонаправленного материала вдоль направления армирования;  $\alpha_2^0$  — КЛТР поперек армирования;  $E_1, E_2, G_{12}$  — модули упругости однонаправленного материала при деформировании вдоль армирования, поперек и на сдвиг в плоскости слоя.

Для определения напряжений поперечного сдвига предварительно определим перерезывающие силы по (2.100), (2.103)

$$Q_1 = K_{11} \psi_1, \quad (1.2),$$

где

$$K_{11} = h^2 \left( \int_{-e}^s \frac{H_{21} dz}{G_{31}} \right)^{-1}, \quad (1.2);$$

$$H_{21} = \frac{1 + k_1 z}{1 + k_2 z}, \quad (1.2).$$

Далее, воспользовавшись аппроксимацией (2.96), определим поперечные касательные напряжения

$$\sigma_{31} = \frac{1}{h} \frac{1}{(1 + k_2 z)} Q_1, \quad (1.2).$$

Пересчет поперечных касательных напряжения при переходе в систему координат, связанную со слоем (рис. 2.13, 2.14), выполним согласно (2.75)

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{31} &= \sigma_{31}c + \sigma_{32}s; \\ \sigma'_{32} &= \pm \sigma_{31}s + \sigma_{32}c, \end{aligned} \right\} \quad (2.161)$$

где  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ .

Напряжения, определенные соотношениями (2.160), (2.161), являются яскowymi.

В качестве исходных данных для работы подпрограммы примем: RK1, RK2, KSL, CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), E, TE, TS, BL(KSL), A(2, KSL) — даны в описании исходных данных для подпрограммы DKSL (пример 2.2) и TERMN (пример 2.3); EPS(4) — в массиве последовательно размещаются значения  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ ; CAP(4) — в массиве последовательно размещаются значения  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}$ ; PSI(2) — в массиве последовательно размещаются значения  $\psi_1, \psi_2$ ;

В результате работы подпрограммы STRSL будут определены: FL(3, KSL) — массив, в  $i$ -м столбце которого размещаются значения напряжений  $\sigma'_1(\varphi), \sigma'_2(\varphi), \sigma'_{12}(\varphi)$  для  $i$ -го слоя, вычисленные при  $z = z_{(i-1)}$ ; FML(3, KSL) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце  $\sigma'_1(-\varphi), \sigma'_2(-\varphi), \sigma'_{12}(-\varphi)$  (для  $i$ -го слоя при  $z = z_{(i-1)}$ ); FU(3, KSL) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце  $\sigma'_1(\varphi), \sigma'_2(\varphi), \sigma'_{12}(\varphi)$  (для  $i$ -го слоя при  $z = z_{(i)}$ ); FMU(3, KSL) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце  $\sigma'_1(-\varphi), \sigma'_2(-\varphi), \sigma'_{12}(-\varphi)$  (для  $i$ -го слоя при  $z = z_{(i)}$ ); TF(2, KSL) — массив, в  $i$ -м столбце которого последовательно размещается информация о средних поперечных касательных напряжениях  $i$ -го слоя  $\sigma_{31}'(\varphi); \sigma_{32}'(\varphi); \sigma_{31}'(-\varphi); \sigma_{32}'(-\varphi)$  для  $i$ -го слоя.

Текст подпрограммы STRSL

```
SUBROUTINE STRSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F,
* E, TE, TS, BL, A, EPS, CAP, PSI,
* FL, FML, FU, FMN, TF, TMF)
DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), BL(KSL),
* A(2, KSL), EPS(4), CAP(4), PSI(2), SS(3),
* FL(3, KSL), FML(3, KSL), FU(3, KSL), FMU(3, KSL),
* TF(2, KSL), TMF(2, KSL)
DO 1 I = 1, 3
DO 1 J = 1, KSL
FL(I, J) = 0.
FML(I, J) = 0.
FU(I, J) = 0.
FMU(I, J) = 0.
DO 2 I = 1, 2
DO 2 J = 1, KSL
TF(I, J) = 0.
TMF(I, J) = 0.
HL = 0.
```



```

DO 3 I=1, KSL
3 HL=HL+H(I)/BL(I)
  Q=(TE-TS)/HL
  Z1=-E
  D99=Ø.
  D1Ø1Ø=Ø.
  DO 4 I=1, KSL
    C55=CC(5, I)
    C66=CC(4, I)
    FI=F(I)
    C2=COS(FI)**2
    S2=SIN(FI)**2
    CC66=C66*C2+C55*S2
    CC55=C55*C2+C66*S2
    Z2=Z1+H(I)
    T1=H(I)
    T=Ø.5*(Z1+Z2)
    H12=(1.+RK2*T)/(1.+RK1*T)
    H21=1./H12
    D99=D99+H21*T1/CC66
    D1Ø1Ø=D1Ø1Ø+H12*T1/CC55
4 Z1=Z2
  HH=Z1+E
  D99=HH*HH/D99
  D1Ø1Ø=HH*HH/D1Ø1Ø
  Q1=D99*PSI(1)
  Q2=D1Ø1Ø*PSI(2)
  Z1=-E
  T1=TE
  DO 5 I=1, KSL
    Z2=Z1+H(I)
    T2=T1-Q*H(I)/BL(I)
    FI=F(I)
    C=COS(FI)
    S=SIN(FI)
    T=Ø.5*(Z1+Z2)
    S31=Q1/HH/(1.+RK2*T)
    S32=Q2/HH/(1.+RK1*T)
    TF(1, I)=S31*C-S32*S
    TF(2, I)=S31*S+S32*C
    TMF(1, I)=S31*C+S32*S
    TMF(2, I)=-S31*S+S32*C
    T=1.-CC(6, I)*CC(7, I)
    C11=CC(1, I)/T
    C22=CC(2, I)/T
    C12=C11*CC(7, I)
    C44=CC(3, I)
    AL1=A(1, I)
    AL2=A(2, I)
    FI=F(I)
    FIM=-FI
  CALL SGM(EPS, CAP, RK1, RK2, Z1, FI, T1,
* C11, C12, C22, C44, AL1, AL2, SS)
  DO 6 J=1,3
6 FL(J, I)=SS(J)
  CALL SGM(EPS, CAP, RK1, RK2, Z1, FIM, T1,
* C11, C12, C22, C44, AL1, AL2, SS)
  DO 7 J=1,3
7 FML(J, I)=SS(J)
  CALL SGM(EPS, CAP, RK1, RK2, Z2, FI, T2,

```

```

* C11, C12, C22, C44, AL1, AL2, SS)
DO 8 J=1,3
8 FU(J, I)=SS(J)
CALL SGM(EPS, CAP, RK1, RK2, Z2, FIM, T2,
* C11, C12, C22, C44, AL1, AL2, SS)
DO 9 J=1,3
9 FMU(J, I)=SS(J)
Z1=Z2
T1=T2
5 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE SGM(EPS, CAP, RK1, RK2, Z, FI, T,
* C11, C12, C22, C44, AL1, AL2, SS)
DIMENSION EPS(4), CAP(4), SS(3)
EE1=(EPS(1)+Z*CAP(1))/(1.+RK1*Z)
EE2=(EPS(2)+Z*CAP(2))/(1.+RK2*Z)
EE12=(EPS(3)+Z*CAP(3))/(1.+RK1*Z)+
* (EPS(4)+Z*CAP(4))/I(1.+RK2*Z)
S=SIN(FI)
C=COS(FI)
S2=S*S
C2=C*C
E1=EE1*C2+EE2*S2+EE12*S*C
E2=EE1*S2+EE2*C2-EE12*S*C
E12=(EE2-EE1)*2.*S*C+EE12*(C2-S2)
SS(1)=C11*E1+C12*E2-T*(C11*AL1+C12*AL2)
SS(2)=C12*E1+C22*E2-T*(C12*AL1+C22*AL2)
SS(3)=C44*E12
RETURN
END

```

### 3. КОМПОЗИТНЫЕ СТЕРЖНИ, БАЛКИ И СТЕРЖНЕВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Характерной особенностью силовых элементов в виде балок и стержней является то, что их длина существенно превосходит поперечные размеры. Это обстоятельство позволяет упростить модель деформирования и сделать ее квазидвумерной.

Стержневые элементы и системы широко применяют в различных силовых конструкциях. Стержни и балки используют в элементах силовых каркасов в виде лонжеронов, стрингеров, силовых поясов. С помощью стержневых кронштейнов осуществляется крепление различных узлов и элементов оборудования. Объединенные с помощью соединительных узлов в единую геометрически неизменяемую конструкцию стержни образуют силовые стержневые системы, которые применяют в строительстве, машиностроении, авиационной и ракетно-космической технике.

Для стержневых элементов рассматриваются нагружение внешними силами и нагрев. Для полных толстостенных и тонкостенных многослойных цилиндрических стержней, работающих на растяжение — сжатие и изгиб, приводятся программы вычисления матриц жесткости. Рассмотрены особенности деформирования стержней несимметричной структуры, растяжение и сжатие которых сопровождается закручиванием. Для исследования устойчивости дается матрица приведенных начальных усилий. Изгиб и устойчивость стержней рассматриваются с учетом деформаций сдвига.

Основное внимание уделяется построению матриц жесткости и векторов приведенных узловых сил для конечных элементов многослойных стержней.

### 3.1. СТЕРЖНЕВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФЕРМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

#### 3.1.1. Кинематика деформирования и жесткостные характеристики

Рассмотрим элемент ферменной конструкции в виде прямолинейного стержня. Отдельные стержни соединяются между собой с помощью соединительных шарниров (шаровых или цилиндрических). Стержни равномерно нагреты, на систему действуют сосредоточенные силы, приложенные в узлах. Будем считать, что основное напряженно-деформированное состояние стержня достаточно точно описывается однородным растяжением—сжатием вдоль его продольной оси.

Рассмотрим деформирование цилиндрического полого многослойного стержня (рис. 3.1). При однородном продольном растяжении—сжатии деформации в стержне будут осесимметричными и постоянными по длине и в соответствии с (2.91), (2.92)

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_1 = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_2(z) = \frac{w}{R(1+z/R)}, \quad (3.1)$$

где  $u$  — осевое перемещение;  $w$  — радиальное перемещение базовой поверхности ( $z=0$ );  $R$  — средний радиус.

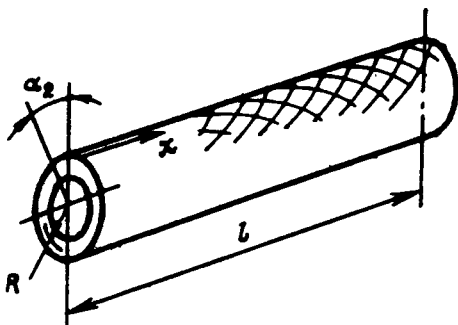


Рис. 3.1. Цилиндрический полый многослойный стержень

Для связи напряжений с деформациями воспользуемся соотношениями упругости. Для ортотропного материала с учетом температурных составляющих деформаций будем иметь согласно (2.80)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11}\varepsilon_1(z) + c_{12}\varepsilon_2(z) - \sigma_{1T}; \\ \sigma_2 &= c_{12}\varepsilon_1(z) + c_{22}\varepsilon_2(z) - \sigma_{2T}; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= c'_{11}c^4 + c'_{22}s^4 + 2(c'_{12} + 2c'_{44})s^2c^2 \quad (1, 2); \\ c_{12} &= c'_{12}(c^4 + s^4) + (c'_{11} + c'_{22} - 4c'_{44})s^2c^2; \\ \sigma_{1\tau} &= T(c^2(c'_{11}\alpha_1^0 + c'_{12}\alpha_2^0) + s^2(c'_{12}\alpha_1^0 + c'_{22}\alpha_2^0)), \quad (1, 2) \\ c'_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (1, 2); \quad c'_{12} = c'_{21} = \nu_{21}c'_{11}; \\ c &= \cos \varphi; \quad s = \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Коэффициенты  $c_{mn}$  и  $\sigma_{m\tau}$  в соотношениях упругости (3.2) считаются известными кусочно-постоянными функциями аргумента  $z$  (эти коэффициенты могут изменяться скачком при переходе от одного слоя к другому, например при смене угла армирования).

Для приведения задачи к одномерной воспользуемся интегральными погонными усилиями и жесткостными характеристиками (2.116), (2.117), (2.126)

$$\begin{aligned} N_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 - N_{1\tau}; \\ N_2 &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 - N_{2\tau}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \\ N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1(1 + z/R) dz; \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz; \\ N_{1\tau} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1\tau}(1 + z/R) dz; \quad N_{2\tau} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2\tau} dz. \end{aligned}$$

Для многослойного цилиндрического стержня, состоящего из  $k$  ортотропных слоев, приведенные жесткостные характеристики и температурные составляющие погонных усилий будут вычисляться следующим образом (см. пример 2.2):

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{i=1}^k c_{11}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; \quad B_{12} = \sum_{i=1}^k c_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; \quad B_{22} = \sum_{i=1}^k c_{22}^{[i]} H_{21}^{[i]} t_1^{[i]}; \\ N_{1\tau} &= \sum_{i=1}^k \sigma_{1\tau}^{[i]} H_{12}^{[i]} t_1^{[i]}; \quad N_{2\tau} = \sum_{i=1}^k \sigma_{2\tau}^{[i]} t_1^{[i]}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_{12}^{[i]} &= 1 + t_{[i]}/R; \quad H_{21}^{[i]} = 1/H_{12}^{[i]}; \\ t_1^{[i]} &= z_{(i)} - z_{(i-1)}; \quad t_{[i]} = 0,5(z_{(i)} + z_{(i-1)}); \end{aligned}$$

$k$  — число слоев;  $z_{(i-1)}$ ,  $z_{(i)}$  — нормальные координаты  $z$  внутренней и внешней поверхностей  $i$ -го слоя. Коэффициенты

$c_{mn}^{[i]}, \sigma_{m\tau}^{[i]} (m, n = 1, 2)$  определяются выражениями (3.3) для  $i$ -го слоя.

При вычислениях, проводимых без учета изменения метрики (для тонкостенных стержней  $z/R \ll 1$ ), выражения для  $B_{mn}$  и  $N_{m\tau}$  упрощаются:

$$B_{mn} = \sum_{i=1}^k c_{mn}^{[i]} (z_{(i)} - z_{(i-1)}), \quad (m, n = 1, 2);$$

$$N_{m\tau} = \sum_{i=1}^k \sigma_{m\tau}^{[i]} (z_{(i)} - z_{(i-1)}), \quad (m = 1, 2).$$

В частном случае для изотропного тонкостенного цилиндрического стержня получим

$$B_{11} = B_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2};$$

$$N_{1\tau} = N_{2\tau} = \alpha^0 T \frac{Eh(1+\nu)}{1-\nu^2}.$$

При деформировании стержня окружные погонные усилия равны нулю, т. е.

$$N_2 = B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 - N_{2\tau} = 0.$$

Из этого уравнения можно определить окружные деформации

$$\varepsilon_2 = B_{22}^{-1} (N_{2\tau} - B_{12}\varepsilon_1). \quad (3.5)$$

Тогда погонные осевые усилия  $N_1$  (3.4) будут связаны только с осевыми деформациями  $\varepsilon_1$ :

$$N_1 = B\varepsilon_1 - N_{1\tau}, \quad (3.6)$$

где

$$B = B_{11} - B_{12}^2/B_{22}; \quad N_{1\tau} = N_{1\tau} - N_{2\tau}B_{12}/B_{22}.$$

Для изотропного тонкостенного цилиндрического стержня  $B = Eh$ ;  $N_{1\tau} = Eh\alpha^0 T$ .

Суммарную осевую силу в стержне с учетом (3.6) можно представить в следующем виде:

$$F = \int_0^{2\pi} N_1 R d\alpha_2 = EA\varepsilon_1 - F_{1\tau}, \quad (3.7)$$

где  $A = \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} R dz d\alpha_2$  — коэффициент, представляющий площадь

поперечного сечения стержня;  $E = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} B R d\alpha_2$  — приведенный

модуль на осевое растяжение — сжатие многослойного стержня;  
 $F_T = \int_0^{2\pi} N_T R d\alpha_2$  — температурная составляющая осевой силы.

Для кругового цилиндрического стержня постоянной толщины будем иметь  
 $A = 2\pi R h$ ;  $E = B/h$ ;  $F_T = N_T 2\pi R = EA \alpha^0 T$ ;  
 $\alpha^0 = F_T / (EAT)$ .

### 3.1.2. Матрица жесткости и приведенные узловые силы конечного элемента ферменной конструкции

Для получения жесткостных характеристик стержневого конечного элемента ферменной конструкции воспользуемся вариационной формулировкой принципа возможных перемещений. Рассмотрим цилиндрический многослойный стержень (рис. 3.2).

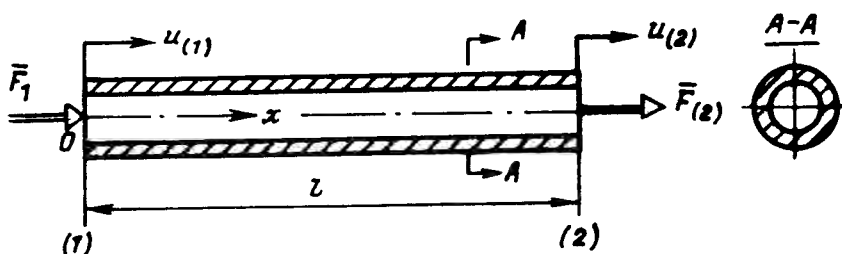


Рис. 3.2. Конечный элемент ферменной конструкции

Начальное и конечное сечения стержня обозначим цифрами 1 и 2. Осевые перемещения этих сечений обозначим  $u_{(1)}$  и  $u_{(2)}$ . Реакции отброшенных частей ферменной конструкции идентифицируем силами  $\bar{F}_{(1)}$ ,  $\bar{F}_{(2)}$ .

Запишем для рассматриваемого случая формулировку принципа возможных перемещений

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_1 \delta \varepsilon_1(z) + \sigma_2 \delta \varepsilon_2(z)) R (1 + z/R) dz d\alpha_2 dx - \\ - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} = 0, \quad (3.9)$$

где

$$\delta \varepsilon_1(z) = \delta \varepsilon_1 = \frac{d}{dx} (\delta u); \quad \delta \varepsilon_2(z) = \frac{\delta w}{R (1 + z/R)};$$

$\delta u$ ,  $\delta w$  представляют возможные осевые и радиальные перемещения;  $\delta u_{(1)}$ ,  $\delta u_{(2)}$  — возможные перемещения торцевых сечений (1) и (2). С учетом определений внутренних силовых фак-

торов, полученных в разделе 3.1.1, уравнение (3.9) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^l \left( F \frac{d}{dx} (\delta u) + 2\pi N_2 \delta w \right) dx - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} = 0. \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что окружное погонное усилие  $N_2=0$ , и вместо (3.10) для решения задачи можно пользоваться уравнением

$$\int_0^l F \frac{d}{dx} (\delta u) dx - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} = 0, \quad (3.11)$$

где под суммарной осевой силой  $F$  понимается согласно (3.7)

$$F = EA \frac{du}{dx} - F_\tau. \quad (3.12)$$

Воспользовавшись (3.12), получим вариационную формулировку задачи в перемещениях:

$$\int_0^l \left( EA \frac{du}{dx} - F_\tau \right) \frac{d}{dx} (\delta u) dx - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} = 0. \quad (3.13)$$

Будем искать решение на линейных аппроксимациях осевых перемещений:

$$\begin{aligned} u &= u_{(1)} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + u_{(2)} \frac{x}{l}; \\ \delta u &= \delta u_{(1)} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + \delta u_{(2)} \frac{x}{l}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Осевые деформации, соответствующие (3.14),

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{(2)} - u_{(1)}}{l} \quad (3.15)$$

Для стержня, у которого температурная составляющая осевой силы и жесткостные характеристики не изменяются по длине стержня, подстановка перемещений (3.14) в (3.13) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \delta u_{(1)} \left[ \frac{EA}{l} (u_{(1)} - u_{(2)}) + F_\tau - \bar{F}_{(1)} \right] &= 0; \\ \delta u_{(2)} \left[ \frac{EA}{l} (-u_{(1)} + u_{(2)}) - F_\tau - \bar{F}_{(2)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эти уравнения позволяют связать реакции  $\bar{F}_{(1)}$ ,  $\bar{F}_{(2)}$  с узловыми перемещениями  $u_{(1)}$ ,  $u_{(2)}$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{(1)} \\ \bar{F}_{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_\tau \\ F_\tau \end{bmatrix}$$

и определить матрицу жесткости  $K'$  стержневого элемента фермы и вектор приведенных узловых сил  $P'$ :

$$K' = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} -F_\tau \\ F_\tau \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

В качестве примера рассмотрим простейший частный случай. Определим температурные смещения и усилия в стержне, закрепленном в сечении (1) (рис. 3.2). Граничными условиями будут  $u_{(1)} = 0$  ( $\delta u_{(1)} = 0$ );  $t_{(2)} = 0$ . Тогда из (3.16) получим при  $F_\tau = EA\alpha^0 T$

$$u_{(2)} = F_\tau l / (EA) = \alpha^0 T l.$$

Для этого случая деформации  $\varepsilon_1 = \alpha^0 T$ , осевая сила  $F = 0$ .

### 3.1.3. Преобразования характеристик конечного элемента для плоских и пространственных систем

Для более компактной записи необходимых преобразований, выполняемых при переходе от местной системы координат  $o'x$  к пространственной системе  $ox_1x_2x_3$  (рис. 3.3), воспользуемся

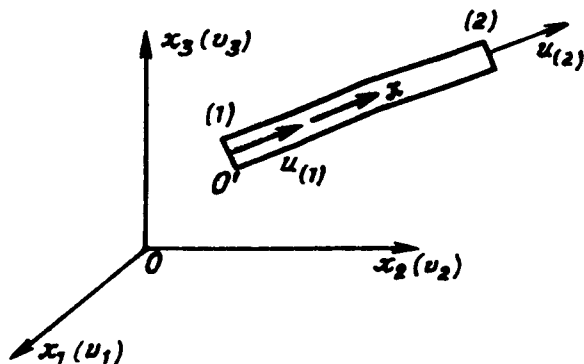


Рис. 3.3. Стержневой конечный элемент в пространственной системе координат

матричной записью вариационной формулировки. Для этого с учетом (3.14), (3.17) перепишем (3.13) в виде

$$\delta q'^T (K' q' - P' - t') = 0, \quad (3.18)$$

где

$$\delta q' = \begin{bmatrix} \delta u_{(1)} \\ \delta u_{(2)} \end{bmatrix}; \quad q' = \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix}; \quad K' = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P' = \begin{bmatrix} -F_\tau \\ F_\tau \end{bmatrix}; \quad t' = \begin{bmatrix} \bar{F}_{(1)} \\ \bar{F}_{(2)} \end{bmatrix}$$



(штрихом специально отмечается принадлежность к местной системе координат  $o'x$ , связанной со стержнем).

В пространственной системе координат  $ox_1x_2x_3$  перемещения узлов (1) и (2) можно задать проекциями осевых смещений  $u_{(1)}$  и  $u_{(2)}$  на оси  $ox_1$ ,  $ox_2$ ,  $ox_3$ . Перемещения вдоль этих осей обозначим  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  соответственно. Тогда можно записать

$$v_{1(i)} = u_{(i)}l_1; \quad v_{2(i)} = u_{(i)}l_2; \quad v_{3(i)} = u_{(i)}l_3 \quad (i = 1, 2), \quad (3.19)$$

где  $l_1 = \cos(\hat{x}, x_1)$ ;  $l_2 = \cos(\hat{x}, x_2)$ ;  $l_3 = \cos(\hat{x}, x_3)$  — направляющие косинусы, определяющие угловую ориентацию стержня в пространстве,

$$l_k = \frac{x_{k(2)} - x_{k(1)}}{l}, \quad k = 1, 2, 3; \quad (3.20)$$

$$l^2 = \sum_{k=1}^3 (x_{k(2)} - x_{k(1)})^2;$$

$x_{1(1)}$ ,  $x_{2(1)}$ ,  $x_{3(1)}$  — координаты начального узла стержня (1);  $x_{1(2)}$ ,  $x_{2(2)}$ ,  $x_{3(2)}$  — координаты конечного узла стержня (2);  $l$  — длина стержня. Из уравнений (3.19) можно получить

$$v_{1(i)}l_1 + v_{2(i)}l_2 + v_{3(i)}l_3 = u_{(i)}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2). \quad (3.21)$$

Воспользовавшись (3.20), легко доказать, что  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ , тогда уравнение (3.21) упрощается

$$u_{(i)} = v_{1(i)}l_1 + v_{2(i)}l_2 + v_{3(i)}l_3, \quad (i = 1, 2) \quad (3.22)$$

Полученное равенство позволяет вычислить осевое смещение  $i$ -го узла стержня, если известны проекции этого смещения на оси  $ox_1$ ,  $ox_2$ ,  $ox_3$ . Равенство (3.22) можно рассматривать как правило, позволяющее выразить узловые перемещения, заданные в местной системе координат, через узловые перемещения в пространственной системе координат. С использованием (3.22) запишем

$$q' = Tq, \quad (3.23)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix};$$

$$q = [v_{1(1)}, v_{2(1)}, v_{3(1)}, v_{1(2)}, v_{2(2)}, v_{3(2)}]^T;$$

$$q' = [u_{(1)}, u_{(2)}]^T.$$

Вернемся к исходной вариационной формулировке задачи (3.18). С учетом (3.23) и аналогичного преобразования  $\delta q' = T \delta q$  вариационное уравнение (3.18) можно записать через новые обобщенные перемещения:

$$\delta q^T T^T (K' T q - P' - t') = 0.$$

Из полученного уравнения следует

$$t = Kq - P, \quad (3.24)$$

где

$$t = T^T t'; \quad P = T^T P';$$

$$K = T^T K' T.$$

Матрица  $K$  представляет матрицу жесткости стержневого элемента, вычисленную в пространственной системе координат. Вектор-столбец  $P$  представляет приведенные узловые силы (от температурного воздействия), согласованные с новыми обобщенными перемещениями  $q$ . Поскольку в качестве компонент вектор-столбца  $q$  выступают проекции узловых перемещений на оси  $ox_k$ , то сопряженными силовыми факторами, выступающими в качестве компонент вектор-столбца  $P$ , будут соответствующие проекции узловых сил. Аналогичным образом упорядочены компоненты вектор-столбца сил реакций  $t$ . В развернутом виде матрица жесткости стержневого элемента и вектор приведенных узловых сил можно представить следующим образом:

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 & -l_1^2 & -l_1 l_2 & -l_1 l_3 \\ & l_2^2 & l_2 l_3 & -l_1 l_2 & -l_2^2 & -l_2 l_3 \\ & & l_3^2 & -l_1 l_3 & -l_2 l_3 & -l_3^2 \\ & & & l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ & & & & l_2^2 & l_2 l_3 \\ \text{сим.} & & & & & l_3^2 \end{bmatrix};$$

$$P = F_T \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

При решении задач о деформировании плоских стержневых систем один из направляющих косинусов (например,  $l_3$ , если ферма расположена в плоскости  $ox_1 x_2$ ) равен нулю. Это приводит к тому, что матрица жесткости конструкции становится особенной. При решении таких задач можно закрепить все узлы в направлении оси, перпендикулярной плоскости конструкции, либо воспользоваться конечным элементом плоской фермы. Получение матрицы жесткости стержневого элемента

плоской фермы осуществляется путем преобразований, аналогичных рассмотренным выше. В результате получаем (при  $l_3=0$ )

$$K = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & -l_1^2 & -l_1 l_2 \\ & l_2^2 & -l_1 l_2 & -l_2^2 \\ & & l_1^2 & l_1 l_2 \\ \text{сим.} & & & l_2^2 \end{bmatrix}; \quad P = F_T \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Сборка отдельных конечных элементов и определение узловых перемещений осуществляется с помощью стандартных процедур метода конечных элементов (приложение 3).

В качестве примера рассмотрим расчет плоской конструкции, состоящей из трех стержней. Нумерация и координаты узлов приводятся в табл. 3.1. В узле 2 приложены силы  $P_1$ ,  $P_2$ , действующие вдоль осей  $ox_1$ ,  $ox_2$ . В результате нагрева во всех стержнях увеличение температуры составляет  $T$  градусов. Жесткостные характеристики стержней одинаковы и равны  $EA$ , коэффициенты линейного температурного расширения равны  $\alpha^0$ . Узлы 1, 3, 4 закреплены. Требуется определить перемещения узла 2.

Согласно исходным данным (табл. 3.1) вычислим по (3.20) длины стержней и направляющие косинусы (табл. 3.2).

Таблица 3.1

| Номер стержня | Номер           |                | Координаты      |       |                |       |
|---------------|-----------------|----------------|-----------------|-------|----------------|-------|
|               | начального узла | конечного узла | начального узла |       | конечного узла |       |
|               |                 |                | $x_1$           | $x_2$ | $x_1$          | $x_2$ |
| 1             | 1               | 2              | 0               | $L$   | $L$            | 0     |
| 2             | 3               | 2              | $L$             | $L$   | $L$            | 0     |
| 3             | 4               | 2              | $2L$            | $L$   | $L$            | 0     |

Таблица 3.2

| Номер стержня | Длина стержня $l$ | Направляющие косинусы |               |
|---------------|-------------------|-----------------------|---------------|
|               |                   | $l_1$                 | $l_2$         |
| 1             | $L\sqrt{2}$       | $\sqrt{2}/2$          | $-\sqrt{2}/2$ |
| 2             | $L$               | 0                     | -1            |
| 3             | $L\sqrt{2}$       | $-\sqrt{2}/2$         | $-\sqrt{2}/2$ |

Вычислим для всех стержней коэффициенты матриц жесткости и приведенных узловых сил (3.26). Затем с учетом граничных условий осуществим с помощью стандартных процедур МКЭ (приложение 3) сборку отдельных элементов. В результате получим систему уравнений относительно искомых перемещений  $V_1$  и  $V_2$  узла 2:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - EA\alpha^0 T(1+\sqrt{2}) \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$V_1 = \frac{\sqrt{2} P_1 L}{EA}; \quad V_2 = \frac{\sqrt{2} L}{1 + \sqrt{2}} \left[ \frac{P_1}{EA} - \alpha^0 T (1 + \sqrt{2}) \right].$$

### 3.1.4. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости

Составим подпрограмму вычисления матрицы жесткости и вектора приведенных узловых сил пространственного конечного элемента ферменной конструкции (разд. 3.1).

Предварительно отметим, что приведенные жесткостные характеристики многослойного элемента  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$  (3.4) могут быть вычислены с использованием подпрограммы DKSL. Этим коэффициентам будут соответствовать следующие элементы массива D:

$$B_{11} = D(1,1); \quad B_{12} = D(1,2); \quad B_{22} = D(2,2).$$

Для вычисления температурных составляющих погонных усилий  $N_{1T}$ ,  $N_{2T}$  можно воспользоваться подпрограммой TERMN. Значениям  $N_{1T}$ ,  $N_{2T}$  будут соответствовать следующие элементы массива TN:

$$N_{1T} = TN(1); \quad N_{2T} = TN(2).$$

В качестве исходных данных примем:

KSL, CC, H, F, TE, TS, BL, A (см. описание подпрограмм DKSL в примере 2.2 и TERMN в примере 2.3); R — средний радиус цилиндрического стержня; X1(2), X2(2), X3(2) — в массивах соответственно идентификаторам размещаются координаты начального и конечного узлов стержня:  $x_{1(1)}$ ,  $x_{1(2)}$  — в массиве X1;  $x_{2(1)}$ ,  $x_{2(2)}$  — в массиве X2;  $x_{3(1)}$ ,  $x_{3(2)}$  — в массиве X3.

В результате работы подпрограммы FRM1 в массиве ST(6,6) будет размещаться матрица K, в массиве P(6) — вектор приведенных узловых сил P по (3.25).

Текст программы FRM1

```
SUBROUTINE FRM1 (KSL, CC, H, F, TE, TS, BL, A,
* R, X1, X2, X3, ST, P)
  DIMENSION X1(2), X2(2), X3(2), CC(7, KSL), H(KSL),
* F(KSL), D(10, 10), TN(4), TM(4), BL(KSL), A(2, KSL),
* C(3), ST(6,6), P(6)
  HH=0.
  DO 1 I=1,KSL
  1 HH=HH+H(I)
  E=0.5*HH
  RK1=0.
  RK2=1./R
  CALL DKSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, D)
  EE=(D(1,1)-D(1,2)**2/D(2,2))/HH
  CALL TERMN (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E,
* TE, TS, BL, A, TN, TM)
  TTN=TN(1)-TN(2)*D(1,2)/D(2,2)
  AA=6.2832*R*HH
  FT=6.2832*R*TTN
  DL=(X1(2)-X1(1))**2+(X2(2)-X2(1))**2+
* (X3(2)-X3(1))**2
  DL=SQRT(DL)
  C(1)=(X1(2)-X1(1))/DL
  C(2)=(X2(2)-X2(1))/DL
  C(3)=(X3(2)-X3(1))/DL
  EAL=EE*AA/DL
  DO 2 I=1,3
  I3=I+3
```

```

P(1)=-FT*C(1)
P(13)=-P(1)
DO 2 J=1,3
J3=J+3
SS=C(1)*C(J)*EAL
ST(I,J)=SS
ST(I,J3)=-SS
ST(13,J)=-SS
2 ST(13,J3)=SS
RETURN
END

```

### 3.1.5. Подпрограмма обработки результатов расчета

Составить подпрограмму, позволяющую по узловым перемещениям многослойного цилиндрического острержня  $q$  см. (3.23) определить осевые деформации стержня  $\varepsilon_1$  (3.15), окружные деформации  $\varepsilon_2$  (3.5) и напряжения в отдельных слоях (в системах координат, связанных со слоями).

В качестве исходных данных примем:

KSL, CC, H, F, TE, TS, BL, A, R, X1, X2, X3 (описание подпрограмм DKSL в примере 2.2, TERMN в примере 2.3, FRM1 в примере 3.1); Q(6) — массив, в котором последовательно размещаются значения узловых перемещений стержня

$Q(1) = v_{1(1)}; \quad Q(2) = v_{2(1)}; \quad Q(3) = v_{3(1)};$

$Q(4) = v_{1(2)}; \quad Q(5) = v_{2(2)}; \quad Q(6) = v_{3(2)}.$

В результате работы подпрограммы FRES1 переменные E1 и E2 примут значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Значения искоемых напряжений будут содержаться в массивах FL, FML, FU, FMU (см. описание подпрограммы STRSL в примере 2.4).

Текст подпрограммы FRES1

```

SUBROUTINE FRES1 (KSL, CC, H, F, TE, TS, BL, A,
* R, X1, X2, X3, Q, E1, E2, FL, FML, FU, FMU)
  DIMENSION X1(2), X2(2), X3(2), CC(7, KSL), H(KSL),
* F(KSL), D(1Ø, 1Ø), TN(4), TM(4), BL(KSL), A(2, KSL),
* C(3), Q(6), EPS(4), CAP(4), PSI(2), FL(3, KSL),
* FML(3, KSL), FU(3, KSL), FMU(3, KSL), TF(1ØØ), TMF(1ØØ)
  HH=Ø.
  DO 1 I=1, KSL
1  HH=HH+H(I)
  E=Ø. 5*HH
  RK1=Ø.
  RK2=1./R
  DL=(X1(2)-X1(1))*2+(X2(2)-X2(1))*2+
* (X3(2)-X3(1))*2
  DL=SQRT(DL)
  C(1)=(X1(2)-X1(1))/DL
  C(2)=(X2(2)-X2(1))/DL
  C(3)=(X3(2)-X3(1))/DL
  U1=Q(1)*C(1)+Q(2)*C(2)+Q(3)*C(3)
  U2=Q(4)*C(1)+Q(5)*C(2)+Q(6)*C(3)
  CALL DKSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, D)
  CALL TERMN (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, TE, TS,
* BL, A, TN, TM)
  DO 2 I=1,4
2  CAP(I)=Ø.
  PSI(1)=Ø.
  PSI(2)=Ø.
  EPS(1)=(U2-U1)/DL

```

```

EPS(2)=(TN(2)-D(1,2)*EPS(1)/D(2,2)
EPS(3)=0.
EPS(4)=0.
CALL STRSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, TE, TS,
* BL, A, EPS, CAP, PSI, FL, FML, FU, FMU, TF, TMF)
E1=EPS(1)
E2=EPS(2)
RETURN
END

```

### 3.1.6. Особенности деформирования цилиндрического многослойного стержня несимметричной структуры

Рассмотрим деформирование цилиндрического многослойного стержня, структура пакета которого несимметрична. В этом случае продольное деформирование стержня может сопровождаться закручиванием стержня вокруг продольной оси (рис. 3.4).

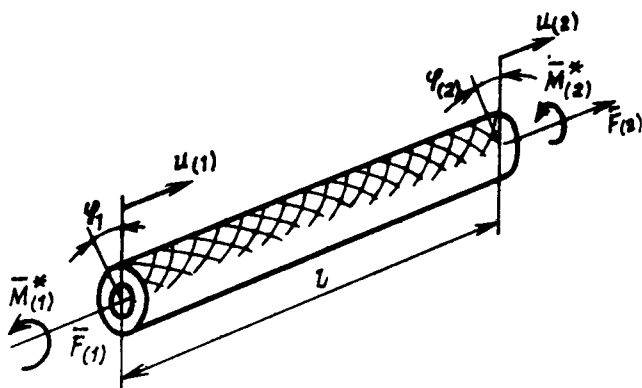


Рис. 3.4. Закручение многослойного стержня несимметричной структуры при осевом деформировании

Кинематику деформирования определим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= u(x); \\ v_2 &= R(1 + z/R)\varphi(x); \\ v_3 &= w(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  — продольное, касательное и нормальное перемещения;  $R$  — средний радиус цилиндра;  $z$  — нормальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности цилиндрического стержня в сторону внешней нормали;  $\varphi$  — угол закручивания.

Распределение перемещений (3.27) соответствует (2.90) при

$$u_1 = u; \quad u_2 = R\varphi; \quad \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \varphi. \quad (3.28)$$

Тогда согласно (2.92) и (3.28) получим

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{du}{dx}; \quad e_2 = \frac{w}{R}; \\ e_{12} &= R \frac{d\varphi}{dx}; \quad e_{21} = 0; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{21} = 0; \quad \kappa_{12} = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Интегральные (по толщине) соотношения упругости запишем с учетом температурных составляющих (2.126)

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12} + C_{13}\kappa_{12} - N_{1T}; \\ N_2 &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + B_{23}\varepsilon_{12} + C_{23}\kappa_{12} - N_{2T}; \\ N_{12} &= B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12} + C_{33}\kappa_{12} - N_{12T}; \\ M_{12} &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_{12} + D_{33}\kappa_{12} - M_{12T}; \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

где погонные усилия и моменты определяются соотношениями (2.113), жесткостные характеристики — соотношениями (2.117).

Вариационная формулировка задачи о продольном деформировании и кручении стержня (рис. 3.4) выглядит следующим образом:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} (\delta\varepsilon_1 N_1 + \delta\varepsilon_2 N_2 + \delta\varepsilon_{12} N_{12} + \delta\kappa_{12} M_{12}) R d\alpha_2 dx - \\ - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} - \bar{M}_{(1)}^* \delta \varphi_{(1)} - \bar{M}_{(2)}^* \delta \varphi_{(2)} = 0. \quad (3.31)$$

Для того чтобы перейти к одномерной задаче, нужно выполнить в (3.31) интегрирование по угловой координате  $\alpha_2$ . Для этого введем обозначения:

$$F_1 = \int_0^{2\pi} N_1 R d\alpha_2; \quad F_2 = \int_0^{2\pi} N_2 R d\alpha_2; \\ M_{кр} = \int_0^{2\pi} (RN_{12} + M_{12}) R d\alpha_2. \quad (3.32)$$

С учетом соотношений упругости (3.30) выражения (3.32) запишем так:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \bar{B}_{11}\varepsilon_1 + \bar{B}_{12}\varepsilon_2 + \bar{C}_{13}\kappa_{12} - \bar{N}_{1T}; \\ F_2 &= \bar{B}_{12}\varepsilon_1 + \bar{B}_{22}\varepsilon_2 + \bar{C}_{23}\kappa_{12} - \bar{N}_{2T}; \\ M_{кр} &= \bar{C}_{13}\varepsilon_1 + \bar{C}_{23}\varepsilon_2 + \bar{D}_{33}\kappa_{12} - \bar{M}_{12T}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

где

$$\bar{B}_{ij} = 2\pi R B_{ij} \quad (i, j = 1, 2); \quad \bar{N}_{iT} = 2\pi R N_{iT} \quad (i = 1, 2); \\ \bar{C}_{i3} = 2\pi R (C_{i3} + R B_{i3}) \quad (i = 1, 2); \quad \bar{D}_{33} = 2\pi R (D_{33} + 2R C_{33} + R^2 B_{33}); \\ \bar{M}_{12T} = 2\pi R (M_{12T} + R N_{12T}).$$

Из (3.31) следует, что значение  $N_2$  (а следовательно, и  $F_2$ ) равно нулю. Это обстоятельство позволяет из второго уравнения системы (3.33) определить окружную деформацию  $\varepsilon_2$

$$\varepsilon_2 = \bar{B}_{22}^{-1} (\bar{N}_{2T} - \bar{B}_{12}\varepsilon_1 - \bar{C}_{23}\kappa_{12}) \quad (3.34)$$

и упростить соотношения (3.33)

$$F = EA\varepsilon_1 - \chi\kappa_{12} - F_T; \\ M_{кр} = \chi\varepsilon_1 + G_{кр}\kappa_{12} - M_{крT}, \quad (3.35)$$

где

$$F = F_1; \\ EA = \bar{B}_{11} - \bar{B}_{12}^2 / \bar{B}_{22}; \\ \chi = \bar{C}_{13} = \bar{C}_{23} \bar{B}_{12} / \bar{B}_{22}; \quad (3.36)$$

$$G_{кр} = \bar{D}_{33} - \bar{C}_{23}^2 / \bar{B}_{22};$$

$$F_T = \bar{N}_{1T} - \bar{B}_{12} \bar{N}_{2T} / \bar{B}_{22};$$

$$M_{крT} = \bar{M}_{12T} - \bar{C}_{23} \bar{N}_{2T} / \bar{B}_{22}.$$

Коэффициенты  $EA$  и  $G_{кр}$  характеризуют жесткости стержня на растяжения и кручение, коэффициент  $\chi$  определяет жесткостную характеристику взаимного влияния растяжения и кручения; значения  $F_T$  и  $M_{крT}$  представляют приведенные температурные составляющие осевой силы и крутящего момента.

С учетом сделанных выше обозначений для силовых факторов вариационную формулировку задачи (3.31) запишем в виде

$$\int_0^l \left( \frac{d\delta u}{dx} F + \frac{d\delta \varphi}{dx} M_{кр} \right) dx - \bar{F}_{(1)} \delta u_{(1)} - \bar{F}_{(2)} \delta u_{(2)} - \bar{M}_{(1)}^* \delta \varphi_{(1)} - \bar{M}_{(2)}^* \delta \varphi_{(2)} = 0, \quad (3.37)$$

где

$$F = EA \frac{du}{dx} + \chi \frac{d\varphi}{dx} - F_T;$$

$$M_{кр} = \chi \frac{du}{dx} + G_{кр} \frac{d\varphi}{dx} - M_{крT}.$$

Получим матрицу жесткости и вектор приведенных узловых сил для стержня, работающего на растяжение — сжатие и кручение. Для более компактной записи вместо (3.37) воспользуемся эквивалентной матричной формулировкой

$$\int_0^l \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} dx - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{t} - \int_0^l \delta \mathcal{E}^T \mathbf{Q}_T dx = 0, \quad (3.38)$$

где

$$\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u};$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\varphi}{dx} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} EA & \chi \\ \chi & G_{кр} \end{bmatrix}; \quad (3.39)$$

$$\mathbf{q} = [u_{(1)}, \varphi_{(1)}, u_{(2)}, \varphi_{(2)}]^T; \quad \mathbf{t} = [\bar{F}_{(1)}, \bar{M}_{(1)}^*, \bar{F}_{(2)}, \bar{M}_{(2)}^*]^T;$$

$$\mathbf{Q}_T = [F_T, M_{крT}]^T.$$

Воспользуемся линейной аппроксимацией и в пределах стержня

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q},$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} (1-x/l) & 0 & x/l & 0 \\ 0 & (1-x/l) & 0 & x/l \end{bmatrix};$$

$\mathbf{q}$  — вектор-столбец узловых обобщенных перемещений. Тогда выражение для деформаций (3.39) можно представить так

$$\mathcal{E} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{L} \Phi$  или в развернутом виде



$$\frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

— применение (3.40) позволяет из вариационной формулировки задачи (3.38) получить связь реакций с обобщенными узловыми перемещениями

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{P},$$

где

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathcal{D} \mathbf{B} dx; \quad \mathbf{P} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_T dx$$

или в развернутом виде

$$\mathbf{K} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} EA & \chi & -EA & -\chi \\ \chi & G_{кр} & -\chi & -G_{кр} \\ -EA & -\chi & EA & \chi \\ -\chi & -G_{кр} & \chi & G_{кр} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -F_T \\ -M_{кр\tau} \\ F_T \\ M_{кр\tau} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  представляет матрицу жесткости, а вектор-столбец  $\mathbf{P}$  — вектор приведенных узловых обобщенных сил, обусловленных температурным воздействием. Как следует из (3.36) и (3.41) для стержней с симметричной структурой многослойного пакета коэффициент жесткости  $\chi$ , характеризующий взаимное влияние растяжения — сжатия и кручения, равен нулю. В этом случае матрица  $\mathbf{K}$  (3.41) будет иметь диагональные блоки и осевое перемещение не будет вызывать закручивание стержня. Следует также отметить, что при несимметричной структуре многослойного пакета возможно существование структур, для которых взаимное влияние растяжения — сжатия и кручения стержня отсутствует.

## 3.2. КОМПОЗИТНЫЕ БАЛКИ

### 3.2.1. Изгиб и растяжение композитных стержней

Рассмотрим деформирование многослойного композитного стержня (рис. 3.5), нагруженного в плоскости  $oxz$  поперечны-

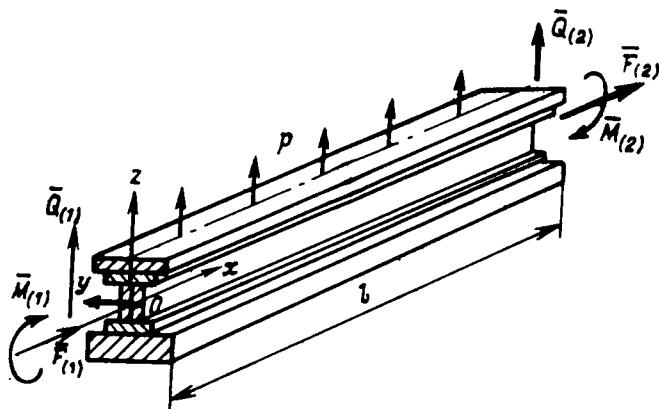


Рис. 3.5. Схема многослойной балки

ми силами, осевыми силами и изгибающими моментами; поперечное сечение стержня симметрично относительно оси  $oz$ ; температура слоев одинакова.

Для описания кинематики деформирования примем линейное распределение перемещений по координате  $z$  (аналогично распределению перемещений, показанному на рис. 2.15),

$$\begin{aligned} v_1 &= u + z\theta; \\ v_3 &= \omega, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где  $u$ ,  $\omega$  — осевое и нормальное перемещения;  $\theta$  — угол поворота сечения стержня.

Воспользовавшись соотношениями (2.91) при  $u_1 = u$ ;  $\theta_1 = \theta$ , получим следующее распределение деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \varepsilon + z\kappa; \\ \gamma_{31(z)} &= \psi, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad \kappa = \frac{d\theta}{dx}; \quad (3.44)$$

$$\psi = \theta + \frac{d\omega}{dx}.$$

Исходную вариационную формулировку задачи запишем с использованием принципа возможных перемещений и соотношений (3.43)

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} (\delta\varepsilon + z\delta\kappa) \sigma_1^{[i]} b_{[i]} dz + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \delta\psi \sigma_{31} b_{[i]} dz - \delta\omega p \right) dx - \delta u_{(1)} \bar{F}_{(1)} - \delta u_{(2)} \bar{F}_{(2)} - \\ & - \delta\omega_{(1)} \bar{Q}_{(1)} - \delta\omega_{(2)} \bar{Q}_{(2)} - \delta\theta_{(1)} \bar{M}_{(1)} - \delta\theta_{(2)} \bar{M}_{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где  $l$  — длина стержня;  $k$  — число слоев — полосок;  $b_{[i]}$  — ширина  $i$ -го слоя;  $z_{(i-1)}$ ,  $z_{(i)}$  — координаты  $z$  нижней и верхней поверхностей  $i$ -го слоя (рис. 3.6). Под силовыми факторами  $\bar{F}_{(i)}$ ,  $\bar{Q}_{(i)}$ ,  $\bar{M}_{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) будем понимать реакции.

Для перехода к одномерной задаче выполним в (3.45) интегрирование по координате  $z$ . Для этого введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \sigma_1^{[i]} b_{[i]} dz; \\ M_x &= \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \sigma_1^{[i]} b_{[i]} z dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Внутренние силовые факторы  $F$  и  $M_x$  представляют осевую силу и изгибающий момент, подсчитанный относительно оси  $oy$  (рис. 3.6).

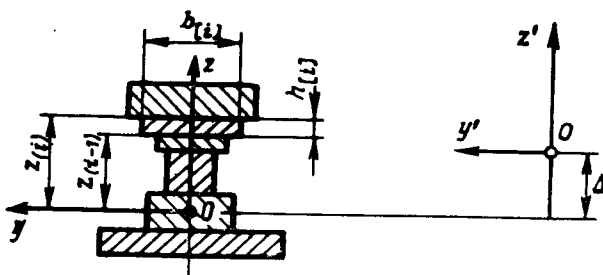


Рис. 3.6. Поперечное сечение многослойной балки

Запишем соотношения упругости для ортотропных материалов слоев (2.80)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11}\varepsilon_1(z) + c_{12}\varepsilon_2(z) - \sigma_{1T}; \\ \sigma_2 &= c_{12}\varepsilon_1(z) + c_{22}\varepsilon_2(z) - \sigma_{2T}, \end{aligned} \right\}$$

где согласно (2.77), (2.81)

$$c_{11} = c'_{11}c^4 + c'_{22}s^4 + 2(c'_{12} - 2c'_{44})s^2c^2, \quad (1, 2);$$

$$c_{12} = c'_{12}(s^4 + c^4) + (c'_{11} + c'_{22} - 4c'_{44})s^2c^2;$$

$$\sigma_{1T} = T(c^2(c'_{11}\alpha_1^0 + c'_{12}\alpha_2^0) + s^2(c'_{12}\alpha_1^0 + c'_{22}\alpha_2^0)), \quad (1, 2);$$

$$c = \cos \varphi; \quad s = \sin \varphi$$

(индекс слоя  $[i]$  опущен). Будем считать, что нормальные напряжения  $\sigma_2 = 0$ . Тогда из (3.45) получим

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1(z) - \sigma_T,$$

где

$$E = c_{11} - c_{12}^2/c_{22},$$

$$\sigma_T = \sigma_{1T} - \sigma_{2T}c_{12}/c_{22}.$$

С использованием соотношения упругости и выражения  $\varepsilon_1(z)$  (3.43) осевую силу  $F$  и изгибающий момент  $M$  (3.46) можно связать с  $\varepsilon$  и  $\kappa$  так:

$$F = B\varepsilon + C_x\kappa - F_T;$$

$$M_x = C_x\varepsilon + D_x\kappa - M_{xT}, \quad (3.47)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^n E_{[i]} b_{[i]} (z_{(i)} - z_{(i-1)});$$

$$\begin{aligned}
C_x &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k E_{[i]} b_{[i]} (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2); \\
D_x &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k E_{[i]} b_{[i]} (z_{(i)}^3 - z_{(i-1)}^3); \\
F_\tau &= \sum_{i=1}^k \sigma_\tau^{[i]} b_{[i]} (z_{(i)} - z_{(i-1)});
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
M_{x\tau} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sigma_\tau^{[i]} b_{[i]} (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2); \\
\sigma_\tau^{[i]} &= d_\tau^{[i]} T; \\
d_\tau^{[i]} &= d_{1\tau}^{[i]} - d_{2\tau}^{[i]} c_{12}^{[i]} / c_{22}^{[i]}; \\
d_{1\tau}^{[i]} &= c^2 (c'_{11} \alpha_1^0 + c'_{12} \alpha_2^0) + s^2 (c'_{12} \alpha_1^0 + c'_{22} \alpha_2^0), \quad (1, 2); \\
c &= \cos \varphi_{[i]}; \quad s = \sin \varphi_{[i]}.
\end{aligned}$$

Для случая, когда температура  $T$  изменяется по координате  $z$ , при вычислении  $F_\tau$  и  $M_{x\tau}$  следует воспользоваться общими выражениями, аналогичными (3.46),

$$\begin{aligned}
F_\tau &= \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \sigma_\tau^{[i]} b_{[i]} dz; \\
M_{x\tau} &= \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \sigma_\tau^{[i]} b_{[i]} z dz.
\end{aligned}$$

Как видно из соотношений (3.47), в общем случае при  $C_x \neq 0$  изгиб стержня будет вызывать деформации в координатной плоскости  $z=0$ . Для того чтобы координатную плоскость совместить с нейтральной, нужно сместить начало отсчета нормальной координаты и осуществить замену  $z' = z - \Delta$  (рис. 3.6), где  $\Delta = C_x/B$ . В этом случае вместо (3.47) можно пользоваться более простыми выражениями для записи соотношений упругости:

$$F = B\varepsilon - F_\tau; \tag{3.49}$$

$$M = D\kappa - M_\tau,$$

где

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{i=1}^k \int_{z'_{(i-1)}}^{z'_{(i)}} \sigma_\tau^{[i]} b_{[i]} z' dz'; \\
D &= D_x - C_x^2/B; \quad M_\tau = M_{x\tau} - F_\tau \Delta.
\end{aligned}$$

Коэффициент  $D$  представляет минимальную изгибную жесткость многослойного стержня\*;  $M_T$  представляет температурную составляющую приведенного изгибающего момента, обусловленную различными коэффициентами линейного температурного расширения отдельных слоев.

Для того чтобы не менять исходную вариационную формулировку задачи (3.45), будем считать, что в качестве координатной плоскости ( $z=0$ ) сразу выбрана нейтральная плоскость. В этом случае можно пользоваться соотношениями упругости в виде уравнений (3.49). При вычислении коэффициентов  $C_x$ ,  $D_x$ ,  $M_{xT}$  (3.48) в качестве координатной может выступать любая плоскость.

Относительно распределения поперечных касательных напряжений  $\sigma_{31}$  сделаем дополнительно предположение

$$\sigma_{31} = \frac{Q}{A}. \quad (3.50)$$

Потребуем, чтобы невязка в деформациях поперечного сдвига  $\sigma_{31}/G_{31}$  и  $\psi$  была ортогональна любым напряжениям вида (3.50) для поперечного сечения, т. е.

$$\sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \delta \sigma_{31} \left( \frac{\sigma_{31}}{G_{31}^{[i]}} - \psi \right) b_{[i]} dz = \frac{\delta Q}{A} \left( \frac{Q}{A} \sum_{i=1}^k \frac{h_{[i]} b_{[i]}}{G_{31}^{[i]}} - \psi A \right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$Q = B_{xz} \psi, \quad (3.51)$$

$$B_{xz} = A^2 \left( \sum_{i=1}^k \frac{h_{[i]} b_{[i]}}{G_{31}^{[i]}} \right)^{-1}, \quad Q = \sum_{i=1}^k \int_{z_{(i-1)}}^{z_{(i)}} \sigma_{31} b_{[i]} dz$$

( $B_{xz}$  определяет приведенную жесткость многослойной балки на поперечный сдвиг);  $Q$  — перерезывающая сила.

С учетом сделанных определений внутренних силовых факторов  $F$ ,  $M$ ,  $Q$  исходную вариационную формулировку задачи (3.45) можно представить в следующем виде:

---

\* Можно показать, что для сумм вида  $I_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k c_i (z_{(i)}^r - z_{(i-1)}^r)$ ;

$I_r' = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k c_i (z_{(i)}'^r - z_{(i-1)}'^r)$ , где  $r=1, 2, 3$ ;  $z_{(i)}' = z_{(i)} - \Delta$ , выполняются соотношения  $I_1' = I_1$ ;  $I_2' = I_2 - \Delta I_1$ ;  $I_3' = I_3 - 2\Delta I_2 + \Delta^2 I_1$ . Минимизация  $I_3'$  по  $\Delta$  позволяет определить значение  $\Delta = I_2/I_1$ , при котором  $I_3'$  принимает значение  $I_3^* = I_3 - I_2^2/I_1$ , при этом  $I_2' = 0$ .

$$\int_0^l (\delta \varepsilon F + \delta \kappa M + \delta \psi Q - \delta w p) dx - \delta u_{(1)} \bar{F}_{(1)} - \delta u_{(2)} \bar{F}_{(2)} - \\ - \delta w_{(1)} \bar{Q}_{(1)} - \delta w_{(2)} \bar{Q}_{(2)} - \delta \theta_{(1)} \bar{M}_{(1)} - \delta \theta_{(2)} \bar{M}_{(2)} = 0, \quad (3.52)$$

где

$$\delta \varepsilon = \frac{d\delta u}{dx}; \quad \delta \kappa = \frac{d\delta \theta}{dx}; \quad \delta \psi = \delta \theta + \frac{d\delta w}{dx}; \quad (3.53)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= B \frac{du}{dx} - F_{\tau}; \\ M &= D \frac{d\theta}{dx} - M_{\tau}; \\ Q &= B_{xz} \left( \theta + \frac{dw}{dx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Вариационное уравнение (3.52) позволяет получить уравнения равновесия и записать граничные условия. Воспользуемся выражениями для возможных деформаций (3.53), подставим их в уравнение (3.52) и выполним интегрирование по частям. В результате получим

$$\int_0^l \left( -\delta u \frac{dF}{dx} - \delta \theta \left( \frac{dM}{dx} - Q \right) - \delta w \left( \frac{dQ}{dx} + p \right) \right) dx - \\ - \delta u_{(1)} (\bar{F}_{(1)} + F_{(1)}) - \delta u_{(2)} (\bar{F}_{(2)} - F_{(2)}) - \\ - \delta w_{(1)} (\bar{Q}_{(1)} + Q_{(1)}) - \delta w_{(2)} (\bar{Q}_{(2)} - Q_{(2)}) - \\ - \delta \theta_{(1)} (\bar{M}_{(1)} + M_{(1)}) - \delta \theta_{(2)} (\bar{M}_{(2)} - M_{(2)}) = 0, \quad (3.55)$$

где (1) — нижний индекс, присвоен внутренним силовым факторам  $F$ ,  $Q$ ,  $M$  при  $x=0$ ; (2) — индекс при  $x=l$ . Из (3.55) следуют уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 0; \\ \frac{dM}{dx} &= Q; \\ \frac{dQ}{dx} &= -p. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Уравнения (3.56), дополненные соотношениями упругости (3.54), представляют полную разрешающую систему дифференциальных уравнений. Как следует из (3.55), на торцах стержня могут задаваться либо перемещения  $u_{(i)}$ ,  $w_{(i)}$  и угол поворота сечения  $\theta_{(i)}$ , либо сопряженные силовые факторы  $F_{(i)}$ ,  $Q_{(i)}$ ,  $M_{(i)}$ .

### 3.2.2. Конечный элемент композитной балки

Из уравнения равновесия (3.56), соотношений упругости (3.54) и граничных условий, следующих из (3.55), видно, что изгиб и растяжение стержня описываются несвязанными уравнениями (если в качестве координатной поверхности выбрана нейтральная поверхность). Поскольку растяжение стержня рассмотрено ранее в разделе 3.1, здесь рассмотрим изгиб многослойного стержня (в этом случае стержень будем называть балкой). Из уравнений (3.54) и (3.56) следуют разрешающие уравнения, описывающие изгиб балки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -\theta + \frac{Q}{B_{xz}}; \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{D} + \frac{M_{\tau}}{D}; \\ \frac{dQ}{dx} &= -p; \\ \frac{dM}{dx} &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Выполнив интегрирование (3.57) (см. пример 1.5), вектор состояния для сечения  $x=l$  можно связать с вектором состояния, определенным при  $x=0$ ,

$$\begin{bmatrix} w_{(2)} \\ \theta_{(2)} \\ Q_{(2)} \\ M_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l & \frac{l^3}{6D}(6\xi - 1) & -\frac{l^2}{2D} \\ 0 & 1 & \frac{l^2}{2D} & \frac{l}{D} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{(1)} \\ \theta_{(1)} \\ Q_{(1)} \\ M_{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{pl^4}{24D}(1 - 12\xi) - \frac{M_{\tau}l^2}{2D} \\ -\frac{pl^3}{6D} + \frac{M_{\tau}l}{D} \\ -pl \\ -\frac{pl^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

где  $\xi = D/(B_{xz}l^2)$ . С помощью матрицы фундаментальных решений и вектора частного решения, соответствующих (3.58), можно построить матрицу жесткости  $K$  и вектор приведенных узловых сил  $P$  конечного элемента. Для этого следует выполнить матричные операции (1.112) и (1.113) при

$$\omega_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \omega_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}; \quad \omega_{21} = 0;$$

$$\omega_{12} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{6D} (6\xi - 1) & \frac{-l^2}{2D} \\ \frac{l^2}{2D} & \frac{l}{D} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{pl^4}{24D} (1 - 12\xi) - \frac{M_\tau l^2}{2D} \\ -\frac{pl^3}{6D} + \frac{M_\tau l}{D} \end{bmatrix};$$

$$\dot{\lambda} = \begin{bmatrix} -\frac{pl}{2} \\ -\frac{pl^2}{2} \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$\mathbf{K} = \frac{D}{l^3(1+12\xi)} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ 4l^2(1+3\xi) & 6l & 2l^2(1-6\xi) & \\ \text{сим.} & 12 & 6l & \\ & & 4l^2(1+3\xi) & \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{P} = \left[ \frac{pl}{2}, \left( -\frac{pl^2}{12} - M_\tau \right), \frac{pl}{2}, \left( \frac{pl^2}{12} + M_\tau \right) \right]^T,$$

Такие конечные элементы балок обладают весьма полезными «вычислительными» свойствами. Во-первых, при постоянных жесткостных характеристиках и нагрузках дают точное решение, во-вторых, не реагируют на смещения как жесткого целого и, в-третьих, обеспечивают устойчивый предельный переход при  $\xi \rightarrow 0$  к решениям, соответствующим классическим гипотезам Бернулли. Другой способ получения матрицы жесткости (3.59) можно найти в [35].

### 3.2.3. Изгиб цилиндрического полого стержня

Рассмотрим деформирование тонкостенного многослойного стержня. Относительно малые размеры сечения позволяют сделать допущения об отсутствии деформаций контура сечения в своей плоскости [11]. В этом случае при описании кинематики деформирования можно воспользоваться следующими аппроксимациями перемещений:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \theta R \cos \alpha_2; \\ v_2 &= -W \sin \alpha_2; \\ v_3 &= W \cos \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

или см. (2.89), (2.90)

$$w = W \cos \alpha_2;$$

$$u_1 = \theta R \cos \alpha_2;$$

$$u_2 = -W \sin \alpha_2;$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0,$$



где  $W$  — смещение сечения в нормальной плоскости;  $\theta$  — угол поворота сечения из плоскости (рис. 3.7).

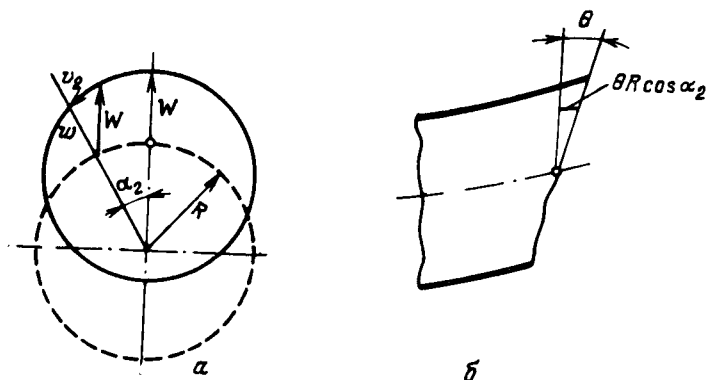


Рис. 3.7. К определению кинематики деформирования тонкого цилиндрического полого стержня при изгибе

Деформации координатной поверхности, соответствующие перемещениям (3.60), будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{d\theta}{dx} R \cos \alpha_2; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{R \partial \alpha_2} + \frac{w}{R} = -\frac{W}{R} \cos \alpha_2 + \frac{W}{R} \cos \alpha_2 = 0; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{dW}{dx} \sin \alpha_2; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = -\theta \sin \alpha_2.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Изменения кривизн и деформации поперечного сдвига, соответствующие аппроксимациям перемещений (3.60), равны нулю.

Вариационную формулировку задачи об изгибе цилиндрического стержня представим в виде

$$\begin{aligned}\int_0^l \left( \int_0^{2\pi} (N_1 \delta \varepsilon_1 + N_{12} \delta \varepsilon_{12} + N_{21} \delta \varepsilon_{21}) R d\alpha_2 - p \delta W \right) dx - \\ - \bar{M}_{(1)} \delta \theta_{(1)} - \bar{M}_{(2)} \delta \theta_{(2)} - \bar{Q}_{(1)} \delta W_{(1)} - \bar{Q}_{(2)} \delta W_{(2)} = 0,\end{aligned}\quad (3.62)$$

где  $p$  — погонная нормальная сила;  $\bar{M}_{(i)}$ ,  $\bar{Q}_{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — внешние суммарные изгибающие моменты и перерезывающие силы, приложенные в начальном и конечном сечениях стержня.

Соотношения упругости запишем с учетом температурных составляющих. Для ортотропных слоев получим

$$\begin{aligned} N_1 &= B_{11}\varepsilon_1 - N_{1T} \\ N_{21} &= N_{12} = B_{33}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}), \end{aligned} \quad (3.63)$$

где  $N_{1T} = N_{1T} \cos \alpha_2$ .

Для перехода к одномерной задаче введем обозначения

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} N_1 R^2 \cos \alpha_2 d\alpha_2; \\ Q &= - \int_0^{2\pi} N_{12} \sin \alpha_2 R d\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Выполнив операции интегрирования (3.64) с учетом (3.63), (3.61), получим выражения интегральных соотношений упругости

$$\begin{aligned} M &= D \frac{d\theta}{dx} - M_T; \\ Q &= B_{xz} \left( \theta + \frac{dW}{dx} \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \pi R^3 B_{11}; \quad M_T = \bar{N}_{1T} \pi R^2; \quad B_{xz} = \pi R B_{33}; \\ B_{11} &= \sum_{i=1}^k c_{11}^{[i]} h_{[i]}; \quad B_{33} = \sum_{i=1}^k c_{33}^{[i]} h_{[i]}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Выражения для силовых факторов (3.64) и деформационных соотношений (3.61) позволяют представить вариационную формулировку задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^l (M \delta \kappa + Q \delta \psi - p \delta W) dx - \sum_{i=1}^2 \bar{M}_{(i)} \delta \theta_{(i)} - \\ - \sum_{i=1}^2 \bar{Q}_{(i)} \delta W_{(i)} = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где  $\delta \kappa = \frac{d\delta \theta}{dx}$ ;  $\delta \psi = \delta \theta + \frac{d\delta W}{dx}$ .

Разрешающие дифференциальные уравнения, которые следуют из уравнений Эйлера, для (3.67) и соотношений упругости (3.65) полностью соответствуют уравнениям системы (3.57). Таким образом, показано, что изгиб цилиндрического тонкостенного многослойного стержня можно описать уравнениями изгиба многослойной балки (3.57). При решении задач методом конечных элементов можно воспользоваться матрицей жесткости и вектором приведенных сил (3.59), при этом приведенные жесткостные характеристики следует вычислять на основе соотношений (3.66).

Для получения разрешающих уравнений, описывающих изгиб толстостенного многослойного цилиндрического стержня, будем учитывать изменение радиуса по толщине стенки (рис. 3.8) и вместо аппроксимаций перемещений (3.60) запишем

$$\begin{aligned} v_1 &= \theta R (1 + z/R) \cos \alpha_2; \\ v_2 &= -W \sin \alpha_2; \\ v_3 &= W \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

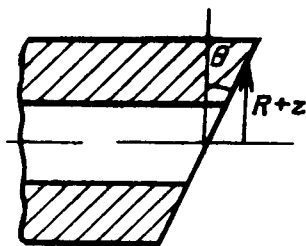


Рис. 3.8. Учет толщины полого цилиндрического стержня

Распределение перемещений в форме (3.68) соответствует (2.89), в которых под  $u_i$ ,  $\theta_i$  и  $w$  следует понимать

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta R \cos \alpha_2; \quad \theta_1 = \theta \cos \alpha_2; \\ u_2 &= -W \sin \alpha_2; \quad \theta_2 = 0; \\ w &= W \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Подстановка (3.69) в деформационные соотношения (2.92) приводит к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{d\theta}{dx} R \cos \alpha_2; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{dW}{dx} \sin \alpha_2; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = -\theta \sin \alpha_2; \\ \kappa_1 &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{d\theta}{dx} \cos \alpha_2; \\ \kappa_{21} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} = -\frac{\theta}{R} \sin \alpha_2; \\ \psi_1 &= \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \theta + \frac{dW}{dx} \right) \cos \alpha_2; \\ \varepsilon_2 &= \psi_2 = 0; \quad \kappa_2 = \kappa_{12} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Для компактной записи дальнейших выкладок воспользуемся векторно-матричной символикой. В матричной форме выражения (3.70) можно представить так:

$$\mathcal{E} = T \bar{\mathcal{E}}, \quad (3.71)$$

где

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_1, \kappa_{21}, \psi_1]^T;$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \left[ \frac{d\theta}{dx}, \frac{dW}{dx}, \theta \right]^T;$$

$$T = \begin{bmatrix} R \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/R) \sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Необходимые для расчета соотношения упругости представим в виде

$$F = \mathcal{D} \bar{\mathcal{E}} - F_T, \quad (3.72)$$

где

$$F = [N_1, N_{12}, N_{21}, M_1, M_{21}, Q_1]^T;$$

$$F_T = [N_{1T}, 0, 0, M_{1T}, 0, 0]^T;$$

$$N_{1T} = \bar{N}_{1T} \cos \alpha_2; \quad M_{1T} = \bar{M}_{1T} \cos \alpha_2;$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{33} & B_{34} & 0 & C_{34} & 0 \\ 0 & B_{34} & B_{44} & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{11} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{34} & C_{44} & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что температурные составляющие погонных усилий можно представить  $F_T = \cos \alpha_2 \hat{F}_T$ , где

$$\hat{F}_T = [\bar{N}_{1T}, 0, 0, \bar{M}_{1T}, 0, 0]^T.$$

Вариационную формулировку задачи запишем на основе принципа возможных перемещений

$$\int_0^l \left( \int_0^{2\pi} \delta \mathcal{E}^T F R d\alpha_2 - \delta X^T N \right) dx - \sum_{i=1}^2 \delta X_{(i)}^T t_{(i)} = 0, \quad (3.73)$$

где

$$\delta X = [\delta W, \delta \theta]^T;$$

$$t_{(i)} = [\bar{Q}_{(i)}, \bar{M}_{(i)}]^T, \quad (i = 1, 2),$$

$$N = [p, 0]^T.$$

С учетом (3.71), (3.72) можно выполнить в (3.73) интегрирование по угловой координате  $\alpha_2$ , в результате получим формулировку одномерной задачи

$$\int_0^l (\delta \bar{\mathcal{E}}^T (\bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathbf{F}}_\tau) - \delta \mathbf{X}^T \mathbf{N}) dx - \sum_{i=1}^2 \delta \mathbf{X}_{(i)}^T \mathbf{t}_{(i)} = 0, \quad (3.74)$$

где

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathbf{L} \mathbf{X};$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = [W, \theta]^T;$$

$$\bar{\mathcal{D}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \mathcal{D} \mathbf{T} R d\alpha_2; \quad \bar{\mathbf{F}}_\tau = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \cos \alpha_2 \hat{\mathbf{F}} R d\alpha_2.$$

В развернутом виде матрица  $\mathcal{D}$  и вектор-столбец  $\bar{\mathbf{F}}$  записываются

$$\bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{12} & G_{22} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{F}}_\tau = \begin{bmatrix} M_\tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

где

$$D = \pi R^3 (B_{11} + 2C_{11}/R + D_{11}/R^2);$$

$$G_{11} = \pi R (B_{33} + K_{11});$$

$$G_{12} = \pi R (B_{34} + C_{34}/R + K_{11});$$

$$G_{22} = \pi R (B_{34} + 2C_{44}/R + D_{44}/R^3 + K_{11});$$

$$M_\tau = \pi R (R^2 \bar{N}_{1\tau} + \bar{M}_{1\tau}).$$

Заметим, что в качестве силовых факторов, сопряженных с обобщенными деформациями  $\bar{\mathcal{E}}$  (см. (3.74)), выступают

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathbf{F}}_\tau. \quad (3.76)$$

Компоненты вектор-столбца  $\bar{\mathbf{F}}$  обозначим следующим образом:

$$\bar{\mathbf{F}} = [M, Q_*, Q_{**}]^T.$$

Уравнение (3.76) можно рассматривать как интегральные соотношения упругости

$$\left. \begin{aligned} M &= D \frac{d\theta}{dx}; \\ Q_* &= G_{11} \frac{dW}{dx} + G_{12}\theta; \\ Q_{**} &= G_{12} \frac{dW}{dx} + G_{22}\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

С учетом (3.76) систему уравнений Эйлера, соответствующую вариационной формулировке (3.74), можно представить в виде

$$L^* \bar{F} - N = 0,$$

где

$$L^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ -\frac{d}{dx} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_*}{dx} + p &= 0; \\ -\frac{dM}{dx} + Q_{**} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Окончательный вид разрешающей системы дифференциальных уравнений следующий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= -\frac{G_{12}}{G_{11}}\theta + \frac{1}{G_{11}}Q_*; \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{D} + \frac{M_T}{D}; \\ \frac{dQ_*}{dx} &= -p; \\ \frac{dM}{dx} &= \frac{G_{12}}{G_{11}}Q_* + \left(G_{22} - \frac{G_{12}^2}{G_{11}}\right)\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3.78), описывающая изгиб многослойного толстостенного цилиндрического стержня, отличается от системы (3.57), описывающей изгиб балки. Однако для тонкостенного стержня вполне допустимо принять  $G_{11} = G_{12} = G_{22}$ ; и система (3.78) становится эквивалентной системе (3.57).

При построении матрицы жесткости конечного элемента многослойного толстостенного цилиндрического стержня удобно воспользоваться функциями формы конечного элемента балки (см. 3.2.2).

**Замечание.** В общем случае функции формы, основанные на фундаментальных решениях, записываются в виде  $X = \Phi q$ , где  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]$ ;  $q = [X_{(1)}, X_{(2)}]^T$ . Матрицы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются следующими матричными операциями

$$\Phi_1 = \tilde{\omega}_{11} - \tilde{\omega}_{12} K_{11}; \quad \Phi_2 = -\tilde{\omega}_{12} K_{12}.$$

где  $\tilde{\omega}_{ij} = \omega_{ij}(x)$ ;  $K_{12}$ ,  $K_{11}$  — матрицы, определяемые соотношениями (1.112).

Для рассматриваемого случая  $X = [\omega, \theta]^T$ ;

$$\tilde{\omega}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{x l^2}{6D} \left( 6\xi - \frac{x^2}{l^2} \right) & -\frac{x^2}{2D} \\ \frac{x^2}{2D} & \frac{x}{D} \end{bmatrix};$$

$$K_{11} = \frac{D}{l^3 (1 + 12\xi)} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 (1 + 3\xi) \end{bmatrix};$$

$$K_{12} = \frac{D}{l^3 (1 + 12\xi)} \begin{bmatrix} -12 & -6l \\ 6l & 2l^2 (1 - 6\xi) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \end{bmatrix};$$

$$q = [W_{(1)}, \theta_{(1)}, W_{(2)}, \theta_{(2)}]^T;$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ 1 + 12\xi - 12\xi \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right];$$

$$\phi_{12} = \frac{l}{1 + 12\xi} \left[ -(1 + 6\xi) \frac{x}{l} + 2(1 + 3\xi) \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right];$$

$$\phi_{13} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ 12\xi \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right];$$

$$\phi_{14} = \frac{l}{1 + 12\xi} \left[ 6\xi \frac{x}{l} + (1 - 6\xi) \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right];$$

$$\phi_{21} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ -\frac{6}{l} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l} \right) \right];$$

$$\phi_{22} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ 1 + 12\xi + \frac{3x^2}{l^2} - \frac{4x}{l} (1 + 3\xi) \right]; \quad (3.79)$$

$$\phi_{23} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ \frac{6}{l} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l} \right) \right];$$

$$\phi_{24} = \frac{1}{1 + 12\xi} \left[ \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x}{l} (1 - 6\xi) \right];$$

$$\xi = \frac{D}{B_{xz} l^2}.$$

### 3.2.4. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости

Составим подпрограмму вычисления матрицы жесткости для изгибаемого конечного элемента цилиндрического многослойного полого стержня. Воспользуемся вариационной формулировкой задачи (3.74) и функциями формы (3.79). Согласно (3.74) получим

$$t = Kq - P, \quad (3.80)$$

где

$$K = \int_0^l B^T \bar{D} B dx;$$

$$\mathbf{P} = \int_0^l (\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{F}}_T - \Phi^T \mathbf{N}) dx;$$

$$\mathbf{t} = [\bar{Q}_{(1)}, \bar{M}_{(1)}, \bar{Q}_{(2)}, \bar{M}_{(2)}]^T;$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi = \begin{bmatrix} \phi'_{21} & \phi'_{22} & \phi'_{23} & \phi'_{24} \\ \phi'_{11} & \phi'_{12} & \phi'_{13} & \phi'_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \end{bmatrix}; \quad (\cdot)' = \frac{d}{dx}(\cdot);$$

$$\bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{12} & G_{22} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{F}}_T = \begin{bmatrix} M_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Жесткостные характеристики  $D$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{22}$  и температурная составляющая изгибного момента  $M_T$  определены ранее в (3.75).

Аналитическое интегрирование матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  (см. 3.80)) достаточно трудоемко. Для того, чтобы эти операции поручить выполнять ЭВМ, следует воспользоваться квадратурными формулами численного интегрирования (Приложение 1).

При составлении подпрограммы вычисления матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  используем подпрограмму численного интегрирования KSIWI (Приложение 1). Поскольку подынтегральные функции в (3.80) содержат полиномы, степени которых не выше четвертой, то достаточно применить квадратурную формулу Гаусса при  $n=3$ .

При вычислении подынтегральной матрицы  $\mathbf{B}^T \bar{\mathcal{D}} \mathbf{B}$  воспользуемся подпрограммами матричной алгебры MTM и MUM (Приложение 2).

В качестве исходных данных примем:

DL — длина стержня; DD, G11, G12, G22 — изгибная жесткость  $D$  и сдвиговые жесткости стержня  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{22}$  (см. (3.75)); TM — температурная составляющая изгибающего момента  $M_T$  (3.75); PP — поперечная равномерно распределенная по длине стержня сила.

В результате работы подпрограммы BEAM1 получим: ST(4,4) — массив матрицы жесткости изгибного конечного элемента многослойного толстостенного цилиндрического стержня; P(4) — массив, в котором размещаются коэффициенты вектора приведенных узловых сил.

Текст подпрограммы BEAM1

SUBROUTINE BEAM1 (DL, DD, G11, G12, G22,

\* TM, PP, ST, P)

DIMENSION ST(4,4), P(4), D(3,3), WW(5),

\* XX(5), B(3,4), BD(4,3), STR(4,4)

DO 1 I=1,4

DO 1 J=1,4

1 ST(I, J)=Ø.

DO 2 I=1,3

DO 2 J=1,3

2 DO(I, J)=Ø.

D(1, 1)=DD

D(2, 2)=G11

D(2, 3)=G12

D(3, 2)=G12

D(3, 3)=G22

NIN=3

A=Ø.

CALL KSIWI (NIN, A, DL, WW, XX)

DL2=DL\*DL

S=DD/(G11\*DL 2)

Z=1.+12.\*S

ZA=1./Z



```

ZZ=ZA/DL
S3=1.+3.*S
S6=1.+6.*S
SS6=1.-6.*S
DO 3 KIN=1, NIN
X=XX(KIN)
X1=X/DL
X2=X1*X1
B(1,1)=-6.*ZA/DL2*(2.*X1-1.)
B(1,2)=ZZ*(6.*X1-4.*S3)
B(1,3)=-B(1,1)
B(1,4)=ZZ*(6.*X1-2.*SS6)
B(2,1)=-6.*ZZ*(2.*S+X1-X2)
B(2,2)=ZA*(-S6+4.*S3*X1-3.*X2)
B(2,3)=-B(2,1)
B(2,4)=ZA*(6.*S+2.*SS6*X1-3.*X2)
B(3,1)=-6.*ZZ*(X2-X1)
B(3,2)=ZA*(Z+3.*X2-4.*X1*S3)
B(3,3)=-B(3,1)
B(3,4)=ZA*(3.*X2-2.*X1*SS6)
CALL MTM (B, D, BD, 3, 4, 3)
CALL MUM (BD, B, STR, 4, 3, 4)
WKIN=WW (KIN)
DO 4 I=1, 4
DO 4 J=1, 4
4 ST(I, J)=ST(I, J)+STR(I, J)*WKIN
3 CONTINUE
P(1)=PP*DL/2.
P(2)=-PP*DL/12.-TM
P(3)=P(1)
P(4)=-P(2)
RETURN
END

```

При расчете композитной балки (рис. 3.5, 3.6), деформированная которой описано в разделах 3.2.1, 3.2.2, в качестве исходных данных для подпрограммы BEAM1 будут выступать  $DD=D$ ,  $G11=G12=G22=B_{xz}$ . При этом для вычисления коэффициентов  $D$  и  $M_T$  следует воспользоваться соотношениями (3.49) и  $B_{xz}$  (3.51). В этом случае полученная матрица жесткости  $K$  будет соответствовать (3.59).

### 3.3. УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### 3.3.1. Вычисление матрицы приведенных начальных усилий для многослойного стержня

Будем считать [1], что в начальном состоянии сжатый стержень имеет прямолинейную ось. Все внешние нагрузки и реакции опор до потери устойчивости действуют строго вдоль этой оси и являются «мертвыми», т. е. при деформациях стержня они не изменяются ни по величине, ни по направлению. Изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях будем считать пренебрежимо малым. Для описания физических соотношений при потере устойчивости воспользуемся линейными соотношениями упругости.

С учетом принятых допущений определим условия, при которых возможны формы равновесия стержня с изогнутой осью, смежные с исходной прямолинейной формой. Для формулировки задачи устойчивости воспользуемся энергетическим критерием в форме Брайана. Считая, что дополнительные перемещения, обусловленные переходом стержня в смежное равновесное состояние, вызывают изгибное деформирование, согласно (2.146) запишем

$$\int_0^l (\delta \kappa M + \delta \psi Q - N w' \delta w') dx - \sum_{i=1}^2 (\delta w_{(i)} \bar{Q}_{(i)} - \delta \theta_{(i)} \bar{M}_{(i)}) = 0, \quad (3.81)$$

$$\delta \kappa = \frac{d\delta\theta}{dx}; \quad \delta \psi = \delta\theta + \frac{dw}{dx};$$

$$M = D \frac{d\theta}{dx}; \quad Q = B_{xz} \left( \theta + \frac{dw}{dx} \right);$$

$N$  — осевая сжимающая сила;  $w, \theta$  — дополнительные перемещения и угол поворота сечения;  $\bar{Q}_{(i)}$  и  $\bar{M}_{(i)}$  — дополнительные реакции. При решении задачи МКЭ воспользуемся аппроксимацией  $w$  и  $\theta$

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{q}, \quad (3.82)$$

где

$$\mathbf{X} = [w, \theta]^T; \quad \mathbf{q} = [w_{(1)}, \theta_{(1)}, w_{(2)}, \theta_{(2)}]^T;$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \end{bmatrix};$$

функции формы  $\phi_{ij}$  матрицы  $\Phi$  определены выражениями (3.79). Для аппроксимации перемещений  $w$  и угла поворота  $\theta$  (3.82) вариационную формулировку задачи (3.81) можно представить в виде

$$\delta \mathbf{q}^T ((\mathbf{K} - \mathbf{N}\mathbf{S}) \mathbf{q} - \mathbf{t}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{t} = (\mathbf{K} - \mathbf{N}\mathbf{S}) \mathbf{q}, \quad (3.83)$$

где

$$\mathbf{S} = \int_0^l (\Phi_1')^T \Phi_1' dx;$$

$$\Phi_1' = [\phi'_{11}, \phi'_{12}, \phi'_{13}, \phi'_{14}]; \quad (3.84)$$

$$\phi'_{11} = -\frac{6}{l(1+12\xi)} \left( 2\xi + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$\phi'_{12} = \frac{1}{1+12\xi} \left[ -(1+6\xi) + 4(1+3\xi) \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} \right];$$

$$\phi'_{14} = \frac{1}{1+12\xi} \left[ 6\xi + 2(1-6\xi) \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} \right];$$

$$\phi'_{13} = -\phi'_{11}; \quad \xi = D/(B_{xz}l^2);$$

$$\mathbf{q} = [\omega_{(1)}, \theta_{(1)}, \omega_{(2)}, \theta_{(2)}]^T; \quad \mathbf{t} = [\bar{Q}_{(1)}, \bar{M}_{(1)}, \bar{Q}_{(2)}, \bar{M}_{(2)}]^T.$$

Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  определяется выражением (3.59). Матрица приведенных начальных напряжений  $\mathbf{S}$  (3.84) в развернутом виде будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ & & s_{33} & s_{34} \\ \text{сим} & & & s_{44} \end{bmatrix},$$

где

$$s_{ij} = \int_0^l \phi'_{1i} \phi'_{1j} dx.$$

После выполнения интегрирования получим значения коэффициентов

$$\begin{aligned} s_{11} &= 36(l^3 + 20\xi l + 120\xi^2)/\Delta; & s_{12} &= -3l/\Delta; \\ s_{13} &= -s_{11}; & s_{14} &= s_{12}; \\ s_{22} &= 4l^2(1 + 15\xi + 90\xi^2)/\Delta; & s_{23} &= -s_{12}; \\ s_{24} &= -l^2(1 + 60\xi + 360\xi^2)/\Delta; & s_{33} &= s_{11}; & s_{34} &= -s_{12}; \\ s_{44} &= s_{22}; & \Delta &= 30l(1 + 12\xi)^2. \end{aligned} \quad (3.85)$$

При  $\xi=0$  деформации поперечного сдвига отсутствуют и матрица  $\mathbf{S}$  (3.82) совпадает с матрицей приведенных начальных напряжений, полученной на основе гипотез деформирования Бернулли и кубической аппроксимации перемещения  $w$ .

В качестве теста рассмотрим задачу устойчивости сжатого, защемленного по торцам стержня. Точное решение этой задачи (1.215) было получено в примере 1.7. Получим решение с помощью МКЭ, воспользовавшись коэффициентами матрицы жесткости (3.59) и коэффициентами матрицы начальных напряжений (3.85). Разобьем стержень на два конечных элемента, длиной  $l/2$  каждый. Выполнив процедуры сборки конечных элементов с учетом граничных условий (приложение 3), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно перемещения  $w_{(2)}$  и угла поворота  $\theta_{(2)}$  среднего сечения

$$\begin{bmatrix} K_{11} - NS_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} - NS_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{(2)} \\ \theta_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

где

$$K_{21} = \frac{192D}{l^3(1+48\xi)}; \quad K_{22} = \frac{16D(1+12\xi)}{l(1+48\xi)}$$

$$S_{11} = \frac{144 (1 + 80\xi + 1920\xi^2)}{30l (1 + 48\xi)^2}; \quad S_{22} = \frac{4l (1 + 240\xi + 5760\xi^2)}{30 (1 + 48\xi)^2}.$$

Значение критической силы будет равно  $N_{кр} = K_{11}/S_{11}$  или

$$N_{кр} = \frac{40D (1 + 48\xi)}{l^2 (1 + 80\xi + 1920\xi^2)}.$$

Из полученного выражения  $N_{кр}$  следует, что для длинных стержней при  $\xi \rightarrow 0$  получаем приближенное значение критической нагрузки  $N_0$ , вычисленное без учета деформаций поперечного сдвига  $N_0 = 40D/l^2$ . При  $l \rightarrow 0$  получаем  $N_{кр} = B_{xz}$ ; при малых значениях  $\xi$  после линеаризации выражения  $N_{кр}$  получим

$$N_{кр} = \frac{40D}{l^2 (1 + 32D/l^2 B_{xz})},$$

что удовлетворительно согласуется с точным решением (1.215).

### 3.3.2. Устойчивость цилиндрического полого стержня

Рассмотрим особенности формулировки задачи устойчивости для многослойного цилиндрического полого стержня. Кинематику деформирования определим аналогично (3.68), где под перемещением  $W$  и углом поворота  $\theta$  будем понимать дополнительные кинематические факторы, связанные с переходом в смежное равновесное состояние.

Для рассматриваемого случая при записи вариационной формулировки критерия устойчивости Брайана будет недостаточно удержания нелинейных составляющих деформации, связанных с углом поворота  $\omega_1$ . Особенность задачи заключается в том, что при смещении сечения как жесткого целого максимальные касательные перемещения  $v_2$  (при  $\alpha_2 = \pm\pi/2$ ) равны максимальным нормальным перемещениям  $v_3(w)$  (при  $\alpha_2 = 0, \pi$ ), (рис. 3.7, а). Поэтому в нелинейных деформациях  $\eta_1$  кроме  $\epsilon_{13}^2$  необходимо учитывать также  $\epsilon_{12}^2$ , поскольку они имеют одинаковый порядок малости (см. (2.132)).

С учетом вышеизложенного вариационная формулировка задачи устойчивости будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} \int_0^{2\pi} (\delta\epsilon_1 N_1 + \delta\epsilon_{12} N_{12} + \delta\epsilon_{21} N_{21} + \delta\kappa_1 M_1 + \delta\kappa_{21} M_{21} + \delta\psi_1 Q_1 - \\ & - N_{10} \delta\eta_1) R d\alpha_2 dx - \sum_{i=1}^2 (\delta W_{(i)} \bar{Q}_{(i)} + \delta\theta_{(i)} \bar{M}_{(i)}) = 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

где

$$\delta\eta_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x} \frac{\partial \delta v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial \delta v_2}{\partial x};$$

$N_{10}$  — начальное осевое погонное усилие. Воспользовавшись кинематикой деформирования, соответствующей (3.68), получим

$$\int_0^{2\pi} N_{10} \delta\eta_1 R d\alpha_2 = N \frac{dW}{dx} \frac{d\delta W}{dx}; \quad N = 2\pi R N_{10}.$$

Вариационная формулировка (3.86) приводит к уравнению (3.83), где для толстостенного многослойного стержня матрица жесткости определяется согласно выражению (3.80), матрица приведенных начальных усилий  $S$  вычисляется согласно (3.84);  $N = 2\pi R N_{10}$  — суммарная осевая сжимающая сила.

### 3.4. РАСЧЕТ КОНИЧЕСКОГО ОТСЕКА ФЕРМЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

На рис. 3.9 показан вид рассматриваемой ферменной конструкции. Геометрические характеристики конструкции определим следующими параметрами:  $R$  — радиус нижнего шпангоута

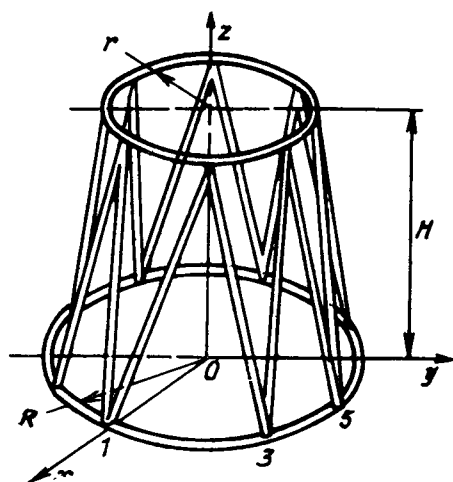


Рис. 3.9. Отсек ферменной конструкции

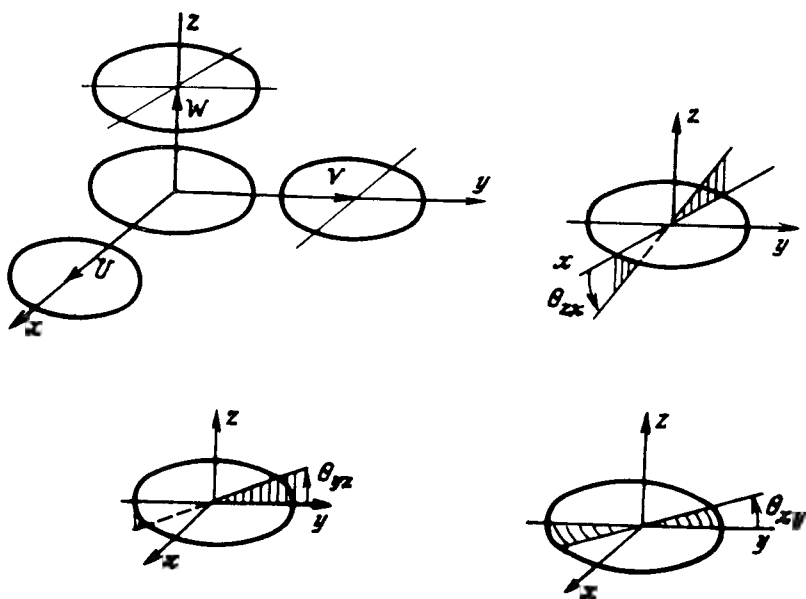


Рис. 3.10. Возможные перемещения и повороты верхнего шпангоута

та,  $r$  — радиус верхнего шпангоута;  $H$  — высота отсека. Число узловых точек на шпангоуте обозначим  $n$ ; число стержней —  $2n$ .

Рассмотрим случай, когда во всех узловых точках стержней на нижнем шпангоуте запрещены все перемещения. Верхний шпангоут, на котором закреплены верхние узловые точки, будем считать абсолютно жестким. Верхнему шпангоуту разрешены перемещения  $U, V, W$ , как жесткому целому вдоль осей  $ox, oy, oz$ , и повороты вокруг этих осей  $\theta_{yz}, \theta_{zx}, \theta_{xy}$  (рис. 3.10).

Нагрузки, приложенными к верхнему шпангоуту, являются (рис. 3.11):  $Q_x, Q_y$  — перерезывающие силы, направленные вдоль осей  $ox$  и  $oy$ ;  $N$  — осевая сила, направленная вдоль оси  $oz$ ;  $M_{yz}, M_{zx}$  — изгибающие моменты, действующие в плоскостях  $yoz, xoz$ , и крутящий момент  $M_{xy}$ .

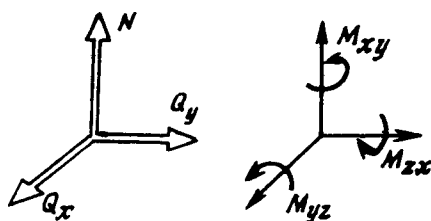


Рис. 3.11. Нагрузки, приложенные к верхнему шпангоуту

Для подготовки задачи к расчету методом конечных элементов выполним нумерацию стержней и узлов на рис. 3.12. Это удобно представить в виде таблицы (табл. 3.3).

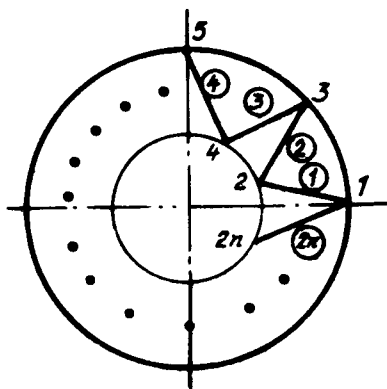


Рис. 3.12. Нумерация стержней и узлов соединений

Таблица 3.3

| Номер<br>стержня | Номера узлов |          |
|------------------|--------------|----------|
|                  | начальный    | конечный |
| 1                | 1            | 2        |
| 2                | 2            | 3        |
| ⋮                | ⋮            | ⋮        |
| 2n               | 2n           | 1        |

Координаты узлов стержневых элементов вычисляются следующим образом (рис. 3.9).

Для узлов, находящихся на нижнем шпангоуте (номера узлов  $k=1, 3, 5, \dots, 2n-1$ ), имеем:

угловые координаты  $\theta_k$

$$\theta_k = \frac{2\pi}{n}(i-1); \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=2i-1;$$

декартовы координаты

$$x_k = R \cos \theta_k; \quad y_k = R \sin \theta_k; \quad z_k = 0.$$

Для узлов, находящихся на верхнем шпангоуте (номера узлов  $k=2, 4, 6, \dots, 2n$ ), имеем:

угловые координаты  $\theta_k$

$$\theta_k = \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}(i+1); \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=2i;$$

декартовы координаты

$$x_k = r \cos \theta_k; \quad y_k = r \sin \theta_k; \quad z_k = H.$$

Каждый стержень конструкции после нумерации будет иметь номера начального и конечного узлов. Поскольку нумерация выполнена так, что для  $i$ -го стержня начальный узел имеет номер  $i$ , а конечный узел имеет номер  $i+1$ , то при вычислении направляющих косинусов  $i$ -го стержня по формуле (3.20) следует положить

$$x_{1(1)} = x_i; \quad x_{2(1)} = y_i; \quad x_{3(1)} = z_i;$$

$$x_{1(2)} = x_{i+1}; \quad x_{2(2)} = y_{i+1}; \quad x_{3(2)} = z_{i+1}.$$

Для вычисления матрицы жесткости пространственного стержня можно воспользоваться подпрограммой FRM1, описание которой дано в разделе 3.1.4.

Особенность решения данной задачи заключается в формулировке граничных условий. Согласно заданным граничным условиям перемещения узлов стержней, примыкающих к верхнему шпангоуту, определяются шесть степенями свободы

$$\mathbf{q} = [U, V, W, \theta_{yz}, \theta_{zx}, \theta_{xy}]^T, \quad (3.87)$$

а перемещения узлов стержней на нижнем шпангоуте равны нулю. Таким образом, на вектор узловых перемещений  $i$ -го стержня  $\mathbf{q}_{(i)}$  накладываются дополнительные связи, которые формально можно записать в виде

$$\mathbf{q}_{(i)} = \mathbf{C}_{(i)} \mathbf{q}, \quad (i=1, 2, \dots, 2n), \quad (3.88)$$

где

$$\mathbf{q}_{(i)} = [v_{1(i)}, v_{2(i)}, v_{3(i)}, v_{1(i+1)}, v_{2(i+1)}, v_{3(i+1)}]^T;$$

$v_{1(i)}, v_{2(i)}, v_{3(i)}$  — перемещения начального узла  $i$ -го стержня вдоль осей  $ox, oy, oz$ ;  $v_{1(i+1)}, v_{2(i+1)}, v_{3(i+1)}$  — перемещения конечного узла стержня вдоль осей  $ox, oy, oz$ . Для стержней с нечетными номерами начальный узел будет находиться на нижнем шпангоуте, тогда матрица связи  $\mathbf{C}_{(i)}$  будет иметь вид:

$$\mathbf{C}_{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{i+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{i+1} \\ 0 & 0 & 1 & y_{i+1} & -x_{i+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 3, \dots, 2n-1).$$

Для стержней с четными номерами на нижнем шпангоуте будет находиться конечный узел стержня и матрица  $\mathbf{C}_{(i)}$  будет содержать следующие коэффициенты:

$$\mathbf{C}_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i=2, 4, \dots, 2n).$$

Согласно принципу возможных перемещений для равновесного положения рассматриваемой ферменной конструкции запишем

$$\sum_{i=1}^{2n} \delta \mathbf{q}_{(i)}^T (\mathbf{K}_{(i)} \mathbf{q}_{(i)} - \mathbf{P}_{(i)}) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_* = 0, \quad (3.89)$$

где

$$\mathbf{P}_* = [Q_x, Q_y, N, M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}]^T;$$

$\mathbf{K}_{(i)}, \mathbf{P}_{(i)}$  — матрица жесткости и вектор приведенных узловых сил для  $i$ -го стержня, вычисленные согласно (3.26);  $\mathbf{q}$  — вектор-столбец обобщенных перемещений ферменной конструкции (3.87). Подстановка условий связи (3.88) в (3.89) приводит к разрешающей системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (3.90)$$



где

$$K = \sum_{i=1}^{2n} C_{(i)}^T K_{(i)} C_{(i)}; \quad P = P_* + C_{(i)}^T P_{(i)}.$$

Матрица  $K$  характеризует приведенные жесткостные свойства рассматриваемой ферменной конструкции, а вектор-столбец  $P$  — внешние силовые нагрузки и температурное воздействие. Поскольку в качестве обобщенных перемещений  $q$  (3.87) выступают перемещения и углы поворота жесткого верхнего шпангоута, то размерность матрицы  $K$  не зависит от числа стержней и равна  $(6 \times 6)$ . После решения системы алгебраических уравнений (3.89) вычисляются узловые перемещения отдельных стержней  $q_{(i)}$  (3.88). Для анализа напряженно-деформированного состояния стержней можно воспользоваться подпрограммой обработки результатов расчета FRES1 (3.1.5).

### 3.5. СТЕРЖНЕВЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОДКРЕПЛЕНИЙ

В современных многослойных конструкциях широко применяют различные подкрепления в виде стрингеров, шпангоутов, фитингов, наличие которых обусловлено как конструктивными, так и технологическими соображениями. Например, это могут быть местные подкрепления, увеличивающие жесткость, элементы стыковки с другими частями конструкции, закладные технологические элементы, необходимые при изготовлении крупногабаритных изделий и др. Подкрепления вносят возмущения в напряженно-деформированное состояние конструкции, изменяют ее жесткостные и прочностные характеристики. По этой причине в математическом обеспечении расчета многослойных конструкций конечные элементы подкреплений играют не менее важную роль, чем элементы многослойных оболочек.

Рассмотрим подкрепляющий элемент в виде криволинейного плоского стержня. Введем систему криволинейных ортогональных координат (рис. 3.13), направив ось  $ox$  вдоль линий центров тяжести сечений. Вкладом в энергию деформирования от кручения и изгиба из плоскости ( $hoz$ ) будем пренебрегать по сравнению с вкладом от растяжения — сжатия и изгиба в плоскости стержня.

При выводе основных соотношений воспользуемся гипотезой плоских сечений, учитывающей деформации поперечного сдвига. В этом случае распределение касательного перемещения и нормального прогиба по сечению элемента можно представить в виде (3.42). Ограничившись линейным представлени-

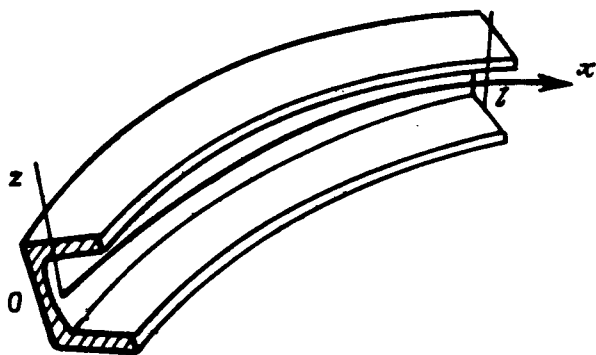


Рис. 3.13. Криволинейный плоский стержень

ем о связи деформаций с перемещениями, воспользуемся соотношениями (2.91) при  $u_1=u$ ,  $\theta_1=\theta$  и получим  $\varepsilon_1=\varepsilon+z\kappa$ ;  $\varepsilon_{31}=\psi$ . Здесь

$$\varepsilon = u' + k w; \quad \kappa = \theta' \quad (3.91)$$

$$\psi = \theta + w' - k u; \quad (\cdot)' = \frac{d}{dx},$$

где  $u$  — касательное перемещение вдоль оси  $ox$ ;  $w$  — нормальное перемещение,  $\theta$  — угол поворота сечения;  $k$  — кривизна подкрепляющего элемента.

Для кругового кольца радиуса  $R$   $k=1/R$ ; для прямолинейного стержня  $k=0$ .

В качестве обобщенных перемещений  $\mathbf{u}$  и деформаций  $\mathcal{E}$  примем

$$\mathbf{u} = [u, w, \theta]^T, \quad (3.92)$$

$$\mathcal{E} = [\varepsilon, \kappa, \psi]^T \quad (3.93)$$

и деформационные соотношения (3.91) представим в виде

$$\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (3.94)$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \nabla & k & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \\ -k & \nabla & 1 \end{bmatrix}; \quad \nabla = \frac{d}{dx}.$$

Соотношения упругости запишем аналогично (3.47), (3.51)

$$\mathcal{N} = \mathcal{D} \mathcal{E} - \mathcal{N}_T, \quad (3.95)$$

где

$$\mathcal{N} = [F, M_x, Q]^T; \quad \mathcal{N}_T = [F_T, M_{xT}, 0]^T$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B & C_x & 0 \\ C_x & D_x & 0 \\ 0 & 0 & B_{xz} \end{bmatrix};$$

$B$  — жесткость на растяжение вдоль оси  $ox$ ;  $C_x$  — смешанная жесткость;  $D_x$  — изгибная жесткость;  $B_{xz}$  — жесткость на поперечный сдвиг.

При вычислении этих жесткостей можно воспользоваться соотношениями для  $B$ ,  $C_x$ ,  $D_x$  (3.48) и  $B_{xz}$  (3.51). При вычислении температурных составляющих  $F_T$ ,  $M_{xT}$  можно воспользоваться выражениями (3.48).

Число узлов в элементе и порядки аппроксимаций перемещений  $u$  и деформаций  $\mathcal{E}$  выберем, исходя из удобства стыковки элементов подкреплений и оболочечных элементов, описанных в разделах 4.4, 5.5, а также из условия согласованности аппроксимаций (1.86). Нетрудно убедиться, что таким элементом будет трехузловой конечный элемент (рис. 3.14) с квадратичной аппроксимацией компонент вектор-столбца  $u$  (3.92) (рис. 3.15)

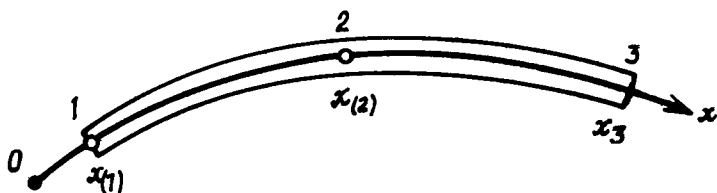


Рис. 3.14. Трехузловой конечный элемент криволинейного стержня

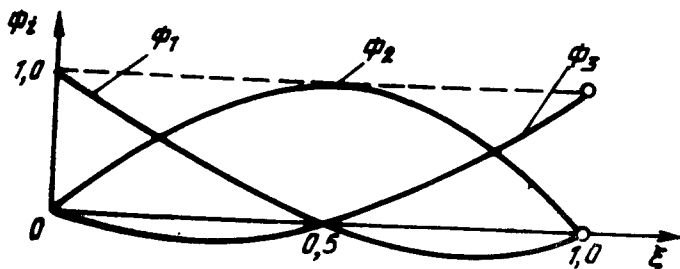


Рис. 3.15. Аппроксимирующие функции перемещений

$$u = \Phi q,$$

(3.96)

где

$$q = [q_{(1)}^T, q_{(2)}^T, q_{(3)}^T]^T;$$

$$\mathbf{q}_{(i)} = [u_{(i)}, w_{(i)}, \theta_{(i)}]^T, \quad (i=1, 2, 3);$$

$$\Phi = [\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \Phi_{(3)}]$$

$$\Phi_{(i)} = \phi_i \mathbf{E}_{(3 \times 3)}, \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\phi_1 = 2\xi^2 - 3\xi + 1; \quad \phi_2 = -4\xi^2 + 4\xi;$$

$$\phi_3 = 2\xi^2 - \xi; \quad \xi = (x - x_{(1)}) / (x_{(3)} - x_{(1)})$$

и линейной аппроксимацией компонент вектор-столбца обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  (3.93) (рис. 3.16)

$$\mathcal{E} = \omega \alpha,$$

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6]^T, \quad \omega = [F, F, F]; \quad (3.97)$$

$$F = [\omega_1, \omega_2], \quad \omega_1 = 1 - \xi; \quad \omega_2 = \xi.$$

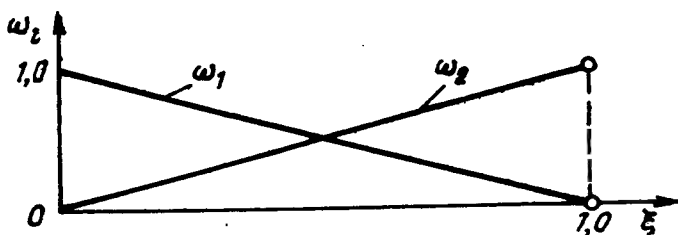


Рис. 3.16. Аппроксимирующие функции деформаций

Для получения матрицы жесткости конечного элемента и вектора приведенных узловых сил воспользуемся смешанной вариационной формулировкой задачи, аналогичной (1.82), (1.83). Тогда с учетом (3.95) для отдельного конечного элемента запишем:

$$\int_{x_{(1)}}^{x_{(3)}} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathcal{D} \mathcal{E} dx - f(\delta \mathbf{u}) = 0; \quad (3.98)$$

$$\int_{x_{(1)}}^{x_{(3)}} \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} (\mathbf{L} \mathbf{u} - \mathcal{E}) dx = 0,$$

где

$$f(\delta \mathbf{u}) = \int_{x_{(1)}}^{x_{(3)}} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} + (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathcal{N}_T) dx + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{t};$$

$\mathbf{p} = [p_x, p_z, m]^T$  — вектор-столбец распределенных внешних сил и моментов;  $x_{(1)}, x_{(3)}$  — координаты  $x$  начального и конечного узлов стержневого элемента (рис. 3.14);  $\mathbf{t}$  — вектор-столбец

узловых реакций;  $\delta \mathbf{q}$  — вектор-столбец возможных узловых обобщенных перемещений конечного элемента. Условия (3.98) с учетом (3.96), (3.97) позволяют получить уравнения  $\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{p} - \mathbf{t}) = 0$ ;  $\delta \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha}) = 0$ . Отсюда после преобразований, аналогичных (1.87) — (1.89), можно установить связь между реакциями  $\mathbf{t}$  с обобщенными узловыми перемещениями  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{t} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P},$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G};$$

$$\mathbf{G} = \int_{x(1)}^{x(3)} \omega^T \mathcal{D} \mathbf{B} dx; \quad \mathbf{H} = \int_{x(1)}^{x(3)} \omega^T \mathcal{D} \omega dx;$$

(3.99)

$$\mathbf{P} = \int_{x(1)}^{x(3)} (\Phi^T \mathbf{p} + \mathbf{B}^T \mathcal{M}_T) dx;$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \Phi = [\mathbf{B}_{(1)}, \mathbf{B}_{(2)}, \mathbf{B}_{(3)}]; \quad \mathbf{B}_{(i)} = \begin{bmatrix} \phi_i' & k \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i' \\ -k \phi_i & \phi_i' & \phi_i \end{bmatrix};$$

$$\phi_i' = \frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{1}{l}; \quad l = x_{(3)} - x_{(1)}.$$

Для интегрирования по координате  $x$  выражений (3.99) удобно воспользоваться квадратурными формулами и подпрограммой KSIW1 (приложение 1). Поскольку подынтегральные выражения (3.99) содержат полиномы не выше третьей степени, то для получения точного результата по квадратурным формулам Гаусса достаточно взять две точки интегрирования.

После выполнения общих процедур МКЭ и определения узловых обобщенных перемещений  $\mathbf{q}$  можно вычислить обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  в любой точке конечного элемента  $\mathcal{E} = \omega \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q}$ . Например, при выводе результатов в середине элемента ( $\xi = 1/2$ ) получим

$$\mathcal{E} = \mathbf{B}_* \mathbf{q}, \quad (3.100)$$

где  $i, j$ -й элемент матриц  $\mathbf{B}_*$  будет вычисляться как

$$b_{*ij} = \frac{1}{2} \sum_{m=m_1}^{m_2} W_{mj}, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 9);$$

$$m_1 = 2(i-1) + 1; \quad m_2 = m_1 + 1;$$

$W_{mj} = m, j$ -й элемент матрицы  $\mathbf{W} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$ .

Составим подпрограмму вычисления матрицы жесткости и вектора приведенных узловых сил стержневого конечного элемента подкрепления.

В качестве исходных данных примем: RK — кривизна стержня ( $1/R$ ) считается постоянной по длине конечного элемента; DL — длина стержневого элемента ( $x_{(3)} - x_{(1)}$ );  $D(3,3)$  — двумерный массив, коэффициенты которого соответствуют коэффициентам матрицы приведенных жесткостей  $\mathcal{D}$  в (3.95); TN(3) — массив, коэффициенты которого соответствуют коэффициентам вектор-столбца температурных составляющих погонных усилий  $\mathcal{N}_T$  в (3.95); PP(3) — массив, коэффициенты которого соответствуют коэффициентам вектор-столбца внешних распределенных сил (p).

В результате работы подпрограммы STRIN получим: SE(9,9) — массив, содержащий коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента (K); PE(9) — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца приведенных узловых сил (P); BB(3,9) — массив, содержащий коэффициенты матрицы B. (3.100).

При работе подпрограммы STRIN используются подпрограммы: MUM, MTM, MATIN (Приложение 2) и подпрограмма KSIW1 (Приложение 1).

Текст подпрограммы STRIN

```
SUBROUTINE STRIN (RK, DL, D, TN, PP, SE, PE, BB)
  DIMENSION D(3,3), TN(3), PP(3), SE(9,9), PE(9),
  * G(6,9), H(6,6), B(3,9), OM(3,6), F(3,9),
  * W(5), XX(5), FU(3), DF(3), FE(2), BB(3,9),
  * OD(6,3), GR(6,9), HR(6,6), FP(9), BN(9)
  DO 1 J=1,9
    PE(J)=0.
  DO 1 I=1,6
  1 G(I, J)=0.
    DO 2 I=1,6
    DO 2 J=1,6
  2 H(I, J)=0.
    DO 3 I=1,3
    DO 3 J=1,9
  3 B(I, J)=0.
    DO 4 I=1,3
    DO 4 J=1,6
  4 OM(I, J)=0.
    DO 5 I=1,3
    DO 5 J=1,9
  5 F(I, J)=0.
    DLL=1./DL
    NIN=2
    CALL KSIW1 (MIN, 0., DL, W, XX)
    DO 6 KIN=1, NIN
      X=XX(KIN)
      WKIN=W(KIN)
      T=X*DLL
      T2=T*T*2.
      FU(1)=T2-3.*T+1.
      FU(2)=-2.*T2+4.*T
      FU(3)=T2-T
      DF(1)=(4.*T-3.)*DLL
      DF(2)=(-8.*T+4.)*DLL
      DF(3)=(4.*T-1.)*DLL
      FE(1)=1.-T
      FE(2)=T
      DO 7 K=1,3
        J=3*(K-1)
        DO 7 I=1,3
          J=J+1
  7 F(I, J)=FU(K)
```

```

DO 8 K=1,3
J=2*(K-1)+1
OM(K, J)=FE(1)
8 OM(K, J+1)=FE(2)
DO 9 K=1,3
J1=3*(K-1)+1
J2=J1+1
J3=J2+1
B(1, J1)=DF(K)
B(1, J2)=RK*FU(K)
B(2, J3)=DF(K)
B(3, J1)=-RK*FU(K)
B(3, J2)=DF(K)
9 B(3, J3)=FU(K)
CALL MTM (OM, D, OD, 3, 6, 3)
CALL MUM (OD, B, GR, 6, 3, 9)
CALL MUM (OD, OM, HR, 6, 3, 6)
CALL MTM (F, PP, FP, 3, 9, 1)
CALL MTM (B, TN, BN, 3, 9, 1)
DO 10 J=1,9
PE(J)=PE(J)+(FP(J)+BN(J))*WKIN
DO 10 I=1,6
10 G(I, J)=G(I, J)+GR(I, J)*WKIN
DO 11 I=1,6
DO 11 J=1,6
11 H(I, J)=H(I, J)+HR(I, J)*WKIN
CONTINUE
CALL MATIN (H, HR, 6)
CALL MUM (HR, G, GR, 6, 6, 9)
CALL MTM (G, GR, SE, 6, 9, 9)
DO 12 I=1,3
M1=2*(I-1)+1
M2=M1+1
DO 12 J=1,9
12 BB(I, J)=0.5*(GR(M1, J)+GR(M2, J))
RETURN
END

```

В качестве тестов можно воспользоваться решениями задач, рассмотренных в примерах 1.4, 1.5.

## 4. МНОГОСЛОЙНЫЕ ПАНЕЛИ И ПЛАСТИНЫ

Панелями в строительной механике называют тонкостенные конструкции, имеющие форму незамкнутых оболочек, с плавными, как правило, пологими поверхностями, ограниченные контурами различных очертаний. Композитные многослойные панели и пластины изготавливают прессованием, вакуумным или автоклавным формованием заготовок в виде пакетов, уложенных с определенной ориентацией слоев из препрегов. Такие технологии позволяют получать материал с заданными свойствами, обеспечивающими высокую весовую эффективность изделия. Композитные панели и пластины являются распространенными силовыми элементами и широко используются в качестве несущих плоскостей различных конструкций, обтекателей, обшивок летательных аппаратов и др.

В главе рассматриваются задачи изгиба многослойных панелей и пластин при действии нормальных и касательных сил и нагрева. Аналитические решения получены для свободно опертых по контуру прямоугольных мно-

гослойных панелей. Для решения задач термоупругости многослойных панелей предлагается шестиузловой треугольный конечный элемент многослойной пологой оболочки, построенный на основе вариационной формулировки смешанного типа.

Задачи устойчивости решены для прямоугольных свободно опертых многослойных пластин, равномерно нагруженных в своей плоскости.

В конце главы рассмотрены вопросы, связанные с возможностью построения континуальной модели крупногабаритной стержневой платформы.

## 4.1. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ И ПЛАСТИН

Рассмотрим панель, представляющую пологую многослойную оболочку (рис. 4.1). Допущение о пологости позволяет считать одинаковыми метрические свойства элемента поверхности и его проекции на плоскость  $ox_1x_2$ . Геометрические характеристики для панелей будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = H_1 = H_2 = 1; \\ k_1 = 1/R_1; \quad k_2 = 1/R_2; \quad \varphi_{12} = \varphi_{21} = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны панели, для пластин  $k_1 = k_2 = 0$ . Выражения (4.1) позволяют представить  $d\alpha_1 = dx_1$  (1, 2) и вместо параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  использовать декартовы координаты  $x_1, x_2$ . Кроме того, свойства пологости (4.1) приводят к тому, что жесткостные характеристики  $B_{33} = B_{34} = B_{44}$ ;  $C_{33} = C_{34} = C_{44}$ ;  $D_{33} = D_{34} = D_{44}$  и

$$\begin{aligned} N_{12} = N_{21} = B_{33}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + C_{33}(\kappa_{12} + \kappa_{21}); \\ M_{12} = M_{21} = C_{33}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + D_{33}(\kappa_{12} + \kappa_{21}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

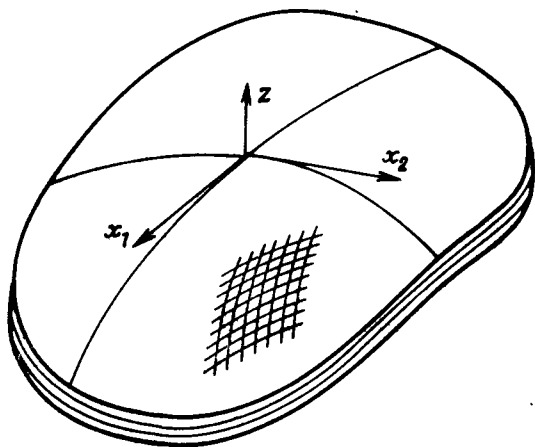


Рис. 4.1. Многослойная панель

Поэтому для описания сдвига и крутки можно ввести следующие обобщенные деформации:



$$\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}; \quad \chi_{12} = \kappa_{12} + \kappa_{21}.$$

Тогда деформационные соотношения достаточно определить следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{1,1} + k_1 w \quad (1, 2); \\ \gamma_{12} &= u_{2,1} + u_{1,2}; \\ \kappa_1 &= \theta_{1,1} \quad (1, 2); \\ \chi_{12} &= \theta_{2,1} + \theta_{1,2} \\ \psi_1 &= \theta_1 + w_{,1} \quad (1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где  $(\cdot)_{,1} = \partial/\partial x_1(\cdot)$  в предположении, что оси  $ox_1$  и  $ox_2$  параллельны линиям главных кривизн.

В матричной форме записи деформационные соотношения (4.3) можно представить так:

$$\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

где

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & k_2 & 0 & 0 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ 0 & 0 & \nabla_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\nabla_1 = \partial/\partial x_1$ , (1, 2).

Физические соотношения для случая, когда оси упругой симметрии материалов слоев параллельны осям  $ox_1$ ,  $ox_2$  с учетом (4.2) запишем в виде

$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2 - N_{1T} \quad (1, 2);$$

$$N_{12} = B_{33}\gamma_{12} + C_{33}\chi_{12};$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 - M_{1T} \quad (1, 2) \quad (4.5)$$

$$M_{12} = C_{33}\gamma_{12} + D_{33}\chi_{12};$$

$$Q_1 = K_{11}\psi_1 \quad (1, 2);$$

или в матричной форме

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}\mathcal{E} - \mathcal{N}_T, \quad (4.6)$$

где

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2]^T$$

$$\mathcal{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, 0, M_{1T}, M_{2T}, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & K_{11} & 0 \\ & & & & & & & K_{22} \end{bmatrix}.$$

— сим.

Жесткостные характеристики  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $K_{ij}$  определяются выражениями (2.117), (2.103) при  $k_i=0$ ; температурные составляющие внутренних силовых факторов  $N_{iT}$ ,  $M_{iT}$  определены для выражений (2.126).

Рассмотрим общий случай силового и температурного нагружения панели, ограниченной гладким контуром  $\Gamma$ . Будем считать, что на поверхности  $S$  ( $z=0$ ) действуют распределенные поверхностные силы  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , направление которых совпадает с направлениями осей  $ox_1$ ,  $ox_2$ ,  $oz$ ; на контуре  $\Gamma_\sigma$  действуют внешние погонные силы  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{Q}$  и моменты  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  (рис. 4.2). На контуре  $\Gamma_u = \Gamma - \Gamma_\sigma$  заданы кинематические граничные условия. Воспользуемся математической формулировкой принципа возможных перемещений и для рассматриваемого случая запишем

$$\iint_S (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{N} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}) dS - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathcal{N}} d\Gamma = 0, \quad (4.7)$$

где

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, 0, 0]^T,$$

$$\bar{\mathcal{N}} = [\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{Q}, \bar{M}_1, \bar{M}_2]^T;$$

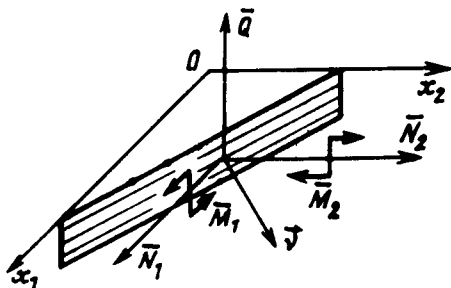


Рис. 4.2. Внешние погонные силы и моменты на контуре панели

$dS = dx_1 dx_2$ ; компоненты вектор-столбцов обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  и внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}$  определены для выражений (4.4), (4.6). Воспользовавшись деформационными соотношениями (4.4), выразим возможные деформации  $\delta\mathcal{E}$  через возможные перемещения

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}. \quad (4.8)$$

После подстановки (4.8) в (4.7) и интегрирования по частям получим

$$\int_S \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{L}^* \mathcal{N} - \mathbf{p}) dS + \int_{\Gamma_\sigma} \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{L}^\nu \mathcal{N} - \overline{\mathcal{N}}) d\Gamma = 0, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{L}^*$  получается по матрице  $\mathbf{L}$  путем транспонирования и смены знаков у дифференциальных операторов; матрица направляющих косинусов  $\mathbf{L}^\nu$  получается по матрице  $\mathbf{L}$  путем транспонирования и замены дифференциальных операторов  $\nabla_i$  на  $l_i$  ( $l_i$  — косинус угла между осью  $ox_i$  и внешней нормалью к контуру  $\nu$ ), коэффициенты, не содержащие дифференциальных операторов, принимают нулевые значения. Из уравнения (4.9) следуют дифференциальные уравнения равновесия

$$\mathbf{L}^* \mathcal{N} - \mathbf{p} = 0 \text{ в } S \quad (4.10)$$

и силовые граничные условия

$$\mathbf{L}^\nu \mathcal{N} - \overline{\mathcal{N}} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma. \quad (4.11)$$

После выполнения матричных операций (4.10), (4.11) получим в развернутом виде уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + p_1 &= 0, \quad (1, 2); \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - k_1 N_1 - k_2 N_2 + p_3 &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 &= 0, \quad (1, 2) \end{aligned}$$

и силовые граничные условия на  $\Gamma_\sigma$

$$\begin{aligned} l_1 N_1 + l_2 N_{12} - \overline{N}_1 &= 0, \quad (1, 2); l_1 Q_1 + l_2 Q_2 - \overline{Q} = 0; \\ l_1 M_1 + l_2 M_{12} - \overline{M} &= 0, \quad (1, 2). \end{aligned}$$

Принцип возможных перемещений (4.7), дополненный деформационными соотношениями (4.4), (4.8) и физическими соотношениями (4.6), позволяет сформулировать линейную задачу термоупругости многослойной панели следующим образом. Требуется найти такие перемещения  $\mathbf{u}$ , для которых вариационное уравнение

$$\iint_S (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathcal{D}\mathbf{L}\mathbf{u} dS = \iint_S ((\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathcal{N}_\tau + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}) dS + \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathcal{N}} d\Gamma \quad (4.12)$$

выполняется для любых  $\delta\mathbf{u}$  (достаточно гладких, не нарушающих внутренних и внешних связей).

## 4.2. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ И ПЛАСТИН

### 4.2.1. Общий случай

Рассмотрим многослойную, прямоугольную панель, свободно опертую по контуру, нагруженную внутренним давлением  $p_3=p$ , сосредоточенными нормальными силами  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) и тепловым потоком (рис. 4.3).

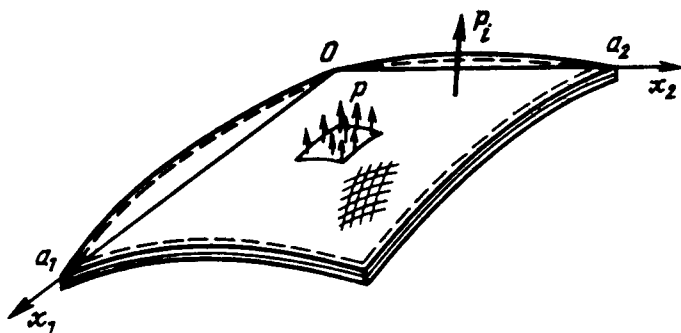


Рис. 4.3. Прямоугольная многослойная панель

Решение получим на основе метода Рэлея—Ритца. Для этого воспользуемся принципом возможных перемещений, формулировку которого для рассматриваемого случая запишем в следующем виде:

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} dx_2 dx_1 = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{N}_\tau - \delta \mathbf{X}^T \mathbf{p}) dx_2 dx_1 + \\ + \sum_{i=1}^N \delta \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_i, \quad (4.13)$$

где

$$\mathcal{E} = \mathbf{L}_x \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = [\varpi, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2]^T;$$

$$\mathbf{p} = [p, 0, 0, 0, 0]^T;$$

$$\mathbf{Q}_i = [P_i, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Компоненты вектор-столбца  $\mathcal{E}$  приводятся для выражения (4.4); компоненты вектор-столбца  $\mathcal{N}_T$  и матрицы  $\mathcal{D}$  приводятся для (4.6). Отметим, что в вектор обобщенных перемещений  $\mathbf{X}$  вместо углов поворота сечений  $\theta_1, \theta_2$  введены средние деформации поперечного сдвига  $\psi_1, \psi_2$ . Такой прием замены переменных, допустимый при свободном опирании панели по контуру, приводит к хорошо обусловленной системе алгебраических уравнений не только для толстых, но и для тонких многослойных панелей. Для выбранных переменных  $\mathbf{X}$  обобщенные деформации представим в виде

$$\mathcal{E} = \mathbf{L}_x \mathbf{X}, \quad (4.14)$$

где

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \nabla_1 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ -\nabla_1 \nabla_1 & \nabla_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 \nabla_2 & 0 & \nabla_2 & 0 & 0 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 & \nabla_2 & \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение будем искать в виде двойных тригонометрических рядов

$$\begin{pmatrix} w \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} w_{mn} \\ \varepsilon_{1mn}, \varepsilon_{2mn} \\ \kappa_{1mn}, \kappa_{2mn} \end{pmatrix} \sin \bar{m}x_1 \sin \bar{n}x_2;$$

$$(u_1, \psi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1mn}, \psi_{1mn}) \cos \bar{m}x_1 \sin \bar{n}x_2;$$

$$(u_2, \psi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2mn}, \psi_{2mn}) \sin \bar{m}x_1 \cos \bar{n}x_2;$$

$$(\gamma_{12}, \chi_{12}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{12mn}, \chi_{12mn}) \cos \bar{m}x_1 \cos \bar{n}x_2,$$

где  $\bar{m} = m\pi/a_1$ ;  $\bar{n} = n\pi/a_2$ ;  $a_1, a_2$  — размеры панели в плане (рис. 4.3). В матричном виде разложение решения в тригонометрические ряды можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{xmn} \mathbf{X}_{mn}; \\ \mathcal{E} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{emn} \mathcal{E}_{mn}; \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где  $\beta_{xmn}$ ,  $\beta_{emn}$  — диагональные матрицы произведений тригонометрических функций:

$$\beta_{xmn} = [s_m s_n, c_m s_n, s_m c_n, c_m c_n, s_m c_n];$$

$$\beta_{emn} = [s_m s_n, s_m s_n, c_m c_n, s_m s_n, s_m s_n, c_m c_n, c_m s_n, s_m c_n];$$

$$s_m = \sin \bar{m} x_1; \quad c_m = \cos \bar{m} x_1; \quad s_n = \sin \bar{n} x_2; \quad c_n = \cos \bar{n} x_2.$$

С учетом (4.14), (4.15) формулировка задачи (4.13) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}_{mn} \mathbf{X}_{mn} = \mathbf{P}_{mn} \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (4.16)$$

где

$$\mathbf{K}_{mn} = \frac{a_1 a_2}{4} \mathbf{B}_{mn}^T \mathcal{D} \mathbf{B}_{mn};$$

$$\mathbf{P}_{mn} = [p_{1mn}, p_{2mn}, p_{3mn}, p_{4mn}, p_{5mn}]^T, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{X}_{mn} = [\omega_{mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn}, u_{1mn}, u_{2mn}]^T;$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -\bar{m} & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & -\bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{n} & \bar{m} \\ \bar{m}^2 & -\bar{m} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 & 0 & -\bar{n} & 0 & 0 \\ -2\bar{m}\bar{n} & \bar{n} & \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$p_{1mn} = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} (p + k_1 N_{1\tau} + k_2 N_{2\tau} + \bar{m}^2 M_{1\tau} +$$

$$+ \bar{n}^2 M_{2\tau}) \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2 dx_2 dx_1 + \sum_{i=1}^N P_i \sin \bar{m} x_{1i} \sin \bar{n} x_{2i};$$

$$p_{2mn} = - \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \bar{m} M_{1\tau} \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2 dx_2 dx_1,$$

$$p_{3mn} = - \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \bar{n} M_{2\tau} \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2 dx_2 dx_1;$$

$$p_{4mn} = - \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \bar{m} N_{1\tau} \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2 dx_2 dx_1;$$

$$p_{5mn} = - \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \bar{n} N_{2\tau} \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2 dx_2 dx_1.$$

Для случая равномерного распределения давления и теплового потока по поверхности панели получим

$$p_{1mn} = \frac{c_{mn}}{\bar{m} \bar{n}} (p + k_1 N_{1\tau} + k_2 N_{2\tau} + \bar{m}^2 M_{1\tau} + \bar{n}^2 M_{2\tau}) + \\ + \sum_{i=1}^N P_i \sin \bar{m} x_{1i} \sin \bar{n} x_{2i};$$

$$p_{2mn} = -c_{mn} \frac{M_{1\tau}}{\bar{n}}; \quad p_{3mn} = -c_{mn} \frac{M_{2\tau}}{\bar{m}}; \quad (4.18)$$

$$p_{4mn} = -c_{mn} \frac{N_{1\tau}}{\bar{n}}; \quad p_{5mn} = -c_{mn} \frac{N_{2\tau}}{\bar{m}};$$

$$c_{mn} = (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi).$$

Таким образом, решение задачи свелось к последовательности решений системы алгебраических уравнений (4.16) при различных формах волнообразования  $(m, n)$ . Основные операции получения матрицы разрешающей системы  $K_{mn}$ , как видно из (4.17), сводятся к перемножению трех матриц. Компоненты вектор-столбца свободных членов  $P_{mn}$  вычисляются согласно (4.18). После решения системы алгебраических уравнений для каждой гармоники волнообразования проводится вычисление амплитудных значений обобщенных деформаций  $\mathcal{E}_{mn} = \mathbf{V}_{mn} \mathbf{X}_{mn}$ . Далее в точках вывода результатов  $(x_{1k}, x_{2k})$  определяются обобщенные деформации  $\beta_{emn}(x_{1k}, x_{2k}) \mathcal{E}_{mn}$  и производится суммирование результатов. После окончания набора обобщенных деформаций в точках вывода можно вычислить деформации в любом слое в системе координат  $(ox_1x_2z)$  панели, а затем определить деформации в системе координат, связанной со слоем. С использованием соотношений упругости для однонаправленного слоя вычисляются напряжения вдоль, поперек армирования и на сдвиг в плоскости слоя. Средние напряжения поперечного сдвига можно оценить отношением перерезывающей силы к толщине панели.

## 4.2.2. Изгиб тонких панелей

При расчете тонких композитных панелей, которые не содержат слоев, обладающих низкой сдвиговой жесткостью, учет деформаций поперечного сдвига не вносит существенных уточнений. В этом случае для формулировки задачи принимается

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}]^T; \\ \mathcal{N} &= [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}]^T; \\ \mathcal{N}_T &= [N_{1T}, N_{2T}, 0, M_{1T}, M_{2T}, 0]^T; \\ \mathbf{X} &= [\omega, u_1, u_2]^T; \quad \mathbf{p} = [p, 0, 0]^T; \quad \mathbf{Q}_i = [P_i, 0, 0]^T;\end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 \\ \text{СИМ.} & & & & & D_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Деформационные соотношения для тонких панелей имеют следующий вид:

$$\varepsilon_1 = u_{1,1} + k_1 \omega, \quad (1, 2)$$

$$\gamma_{12} = u_{2,1} + u_{1,2}$$

$$\kappa_1 = -\omega_{,11}, \quad (1, 2)$$

$$\chi_{12} = -2\omega_{,12}$$

При решении задачи в двойных тригонометрических рядах получим систему уравнений, аналогичную (4.16), в которой при вычислении матрицы  $\mathbf{K}_{mn}$  участвует матрица  $\mathcal{D}$  (4.19) и матрица  $\mathbf{B}_{mn}$ , имеющая следующие коэффициенты:

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{bmatrix} k_1 & -\bar{m} & 0 \\ k_2 & 0 & -\bar{n} \\ 0 & \bar{n} & \bar{m} \\ \bar{m}^2 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 & 0 & 0 \\ -2\bar{m}\bar{n} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

После выполнения матричных операций (4.17) получим

$$\mathbf{K}_{mn} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}k_{11} &= \frac{a_1 a_2}{4} (D_{11} \bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^4 + \\ &+ B_{11} k_1^2 + B_{22} k_2^2 + 2B_{12} k_1 k_2 + \\ &+ 2(C_{11} k_1 + C_{12} k_2) \bar{m}^2 + 2(C_{12} k_1 + C_{22} k_2) \bar{n}^2); \\ k_{12} &= -\frac{a_1 a_2}{4} ((B_{11} k_1 + B_{12} k_2) \bar{m} + C_{11} \bar{m}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m} \bar{n}^2); \\ k_{13} &= -\frac{a_1 a_2}{4} ((B_{22} k_2 + B_{12} k_1) \bar{n} + C_{22} \bar{n}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m}^2 \bar{n});\end{aligned}$$



$$k_{22} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{11} \bar{m}^2 + B_{33} \bar{n}^2); \quad k_{23} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{12} + B_{33}) \bar{m} \bar{n};$$

$$k_{33} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{22} \bar{n}^2 + B_{33} \bar{m}^2).$$

В качестве компонент вектор-столбца  $P_{mn}$  будут выступать  $P_{mn} = [p_{1mn}, p_{4mn}, p_{5mn}]^T$ , где коэффициенты  $p_{imn}$  определены выражениями (4.18).

После решения системы алгебраических уравнений для гармоник  $m, n$  волнообразования получим

$$\begin{bmatrix} w_{mn} \\ u_{1mn} \\ u_{2mn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1mn} \\ p_{4mn} \\ p_{5mn} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= k_{11} k_{22} k_{33} + 2k_{12} k_{23} k_{13} - k_{13}^2 k_{22} - k_{12}^2 k_{33} - k_{23}^2 k_{11}; \\ A_{11} &= k_{22} k_{33} - k_{23}^2; \quad A_{12} = k_{23} k_{13} - k_{12} k_{33}; \\ A_{13} &= k_{12} k_{23} - k_{22} k_{13}; \quad A_{22} = k_{33} k_{11} - k_{13}^2; \\ A_{23} &= k_{12} k_{13} - k_{11} k_{23}; \quad A_{33} = k_{11} k_{22} - k_{12}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Полученное решение выглядит достаточно громоздко. В случае использования ЭВМ целесообразно получать решение на основе (4.16), (4.17) при исходной информации (4.19), (4.20) с использованием стандартных матричных операций.

#### 4.2.3. Изгиб многослойных симметричных пластин

Многослойные пластины с симметричным расположением слоев обладают двумя характерными особенностями. Во-первых, такие пластины могут иметь наибольшие изгибные жесткости среди пластин с аналогичным набором схем армирования. Во-вторых, изгиб пластин с симметричным расположением слоев не сопровождается деформированием срединной поверхности. В этом случае система уравнений (4.16) дает независимые решения для  $w_{mn}$ ,  $\psi_{1mn}$ ,  $\psi_{2mn}$  и для  $u_{1mn}$ ,  $u_{2mn}$ .

Рассмотрим изгиб многослойных симметричных пластин с учетом деформаций поперечных сдвигов. В качестве координатной выберем срединную плоскость пластины ( $e = h/2$ ). В этом случае смешанные жесткости  $C_{11} = C_{12} = C_{22} = C_{33} = 0$ .

Для формулировки задачи изгиба примем

$$\mathcal{E} = [\kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathcal{M} = [M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2]^T;$$

$$\mathcal{M}_T = [M_{1T}, M_{2T}, 0, 0, 0]^T;$$

$$\mathbf{X} = [w, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathbf{p} = [p, 0, 0]^T; \quad \mathbf{Q}_i = [P_i, 0, 0]^T;$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & K_{11} & 0 \\ \text{сим.} & & & & K_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \\ -\nabla_2 \nabla_2 & 0 & \nabla_2 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При решении задачи в двойных тригонометрических рядах получим систему алгебраических уравнений (4.16) или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{mn} \\ \psi_{1mn} \\ \psi_{2mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1mn} \\ p_{2mn} \\ p_{3mn} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{a_1 a_2}{4} (D_{11} \bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^4); \\ k_{12} &= -\frac{a_1 a_2}{4} (D_{11} \bar{m}^3 + (D_{12} + 2D_{33}) \bar{m} \bar{n}^2); \\ k_{13} &= -\frac{a_1 a_2}{4} (D_{22} \bar{n}^3 + (D_{12} + 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}); \\ k_{22} &= \frac{a_1 a_2}{4} (D_{11} \bar{m}^2 + D_{33} \bar{n}^2 + K_{11}); \quad k_{23} = \frac{a_1 a_2}{4} (D_{12} + D_{33}) \bar{m} \bar{n}; \\ k_{33} &= -\frac{a_1 a_2}{4} (D_{22} \bar{n}^2 + D_{33} \bar{m}^2 + K_{22}); \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$p_{1mn} = \frac{c_{mn}}{mn} (p + \bar{m}^2 M_{1\tau} + \bar{n}^2 M_{2\tau}) + \sum_{i=1}^N P_i \sin \bar{m} x_{i1} \sin \bar{n} x_{i2};$$

$$p_{2mn} = -\frac{c_{mn}}{n} M_{1\tau}; \quad p_{3mn} = -\frac{c_{mn}}{m} M_{2\tau};$$

$$c_{mn} = (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi).$$

Решением (4.22) будет

$$\begin{bmatrix} w_{mn} \\ \psi_{1mn} \\ \psi_{2mn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1mn} \\ p_{2mn} \\ p_{3mn} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

где коэффициенты  $\Delta$  и  $A_{ij}$  вычисляются согласно (4.22) при  $k_{ji}$  (4.24). Отличительной особенностью полученной матрицы системы (4.23) является то, что жесткости на поперечные сдвиги  $K_{11}$  и  $K_{22}$  входят только в диагональные коэффициенты  $k_{22}$  и  $k_{33}$ . В этом случае решение системы допускает устойчивый (с вычислительной точки зрения) предельный переход к решению тонких пластин. При  $K_{11} \rightarrow \infty$ ,  $K_{22} \rightarrow \infty$  получим  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ .

При расчете тонких многослойных свободно опертых симметричных пластин исходными данными для формулировки задачи (4.13) будут:

$$\mathcal{E} = [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^T; \quad \mathcal{M} = [M_1, M_2, M_{12}]^T; \quad \mathcal{M}_T = [M_{1T}, M_{2T}, 0]^T; \\ \mathbf{X} = [w]; \quad \mathbf{p} = [p]; \quad \mathbf{Q} = [P_i];$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \bar{m} x_1 \sin \bar{n} x_2; \quad (4.26)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 \nabla_1 \\ -\nabla_2 \nabla_2 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 \end{bmatrix}.$$

Решением алгебраического уравнения (4.16) (размерность матрицы  $\mathbf{K}_{mn}(1 \times 1)$ ), сформированного с исходными данными (4.26), будет

$$w_{mn} = \frac{p_{1mn}}{k_{11}}, \quad (4.27)$$

где  $p_{1mn}$ ,  $k_{11}$  определены в выражениях (4.24). Решение (4.27) соответствует решению (4.25) при  $K_{11} \rightarrow \infty$ ,  $K_{22} \rightarrow \infty$ , а также решению (4.21) при нулевых мембранных жесткостях ( $C_{ij}=0$ ) и нулевых кривизнах ( $k_i=0$ ).

#### 4.2.4. Программа вычисления напряженно-деформированного состояния многослойной свободно опертой панели

Воспользуемся алгоритмом расчета многослойной оболочки, рассмотренным в разделе 4.2.1.

В качестве исходных данных примем: RK1, RK2, KSL, CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), E, TE, TS, BL(KSL), A(2, KSL) — описание исходных данных для подпрограмм DKSL (пример 2.2), TERMN (пример (2.3); AA(2) — в массиве размещаются значения  $a_1$ ,  $a_2$  — размеры панели вдоль осей  $ox_1$  и  $ox_2$ ; PP — нормальное давление  $p$ ; NSIL — число сосредоточенных сил ( $\geq 1$ ); XP(2, NSIL) — массив координат точек приложения сосредоточенных сил, в  $i$ -м столбце последовательно размещаются координаты  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ ; PN(NSIL) — массив значений сосредоточенных сил; NR — число точек вывода результатов расчета; XR(2, NR) — координаты точек вывода (в  $i$ -м столбце последовательно размещаются координаты  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ ); MM, NN — число гармоник разложений по координатам  $ox_1$ ,  $ox_2$ .

В результате работы подпрограммы PANEL получим: EP(3, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; CA(3, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{12}$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; PS(2, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; U(3, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $w$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; TET(2, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода. Подпрограмма PANEL использует подпрограммы DKSL, TERMN (примеры 2.2, 2.3) и подпрограммы MUM, MTM, GAUSS (Приложение 2).

Текст подпрограммы PANEL

```
SUBROUTINE PANEL (RK1, RK2, KSL, CC,
* H, F, E, TE, TS, BL, A, AA, PP, NSIL,
* XP, PN, NR, XR, EP, CA, PS, U, TET, MM, NN)
DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL),
* BL(KSL), A(2, KSL), AA(2), XP(2, NSIL),
* PN(NSIL), XR(2, NR), EP(3, NR), CA(3, NR),
```

```

* PS(2, NR), U(3, NR), TET(2, NR), DD(1Ø, 1Ø),
* TM(4), TN(4), D(8,8), B(8,5), BD(5,8),
* STR(5,5), P(5), X(5)
CALL DKSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, DD)
CALL TERMN (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E,
* TE, TS, BL, A, TN, TM).
DO 1 I=1,8
DO 1 J=1,8
1 D(I, J)=Ø.
DO 2 I=1,3
I3=I+3
I4=I+4
DO 2 J=1,3
J3=J+3
J4=J+4
D(I, J)=DD(I, J)
D(I, J3)=DD(I, J4)
D(I3, J)=DD(I4, J)
2 D(I3, J3)=DD(I4, J4)
D(7,7)=DD(9,9)
D(8,8)=DD(10, 10)
DO 3 I=1,8
DO 3 J=1,8
3 D(I, J)=D(I, J)*AA(1)*AA(2)/4.
DO 4 I=1,8
DO 4 J=1,5
4 B(I, J)=0.
B(1,1)=RK1
B(2,1)=RK2
B(7,2)=1.
B(8,3)=1.
DO 5 I=1,3
DO 5 J=1,NR
EP (I, J)=0.
CA(I, J)=0.
5 U(I, J)=0.
DO 6 I=1,2
DO 6 J=1,NR
PS(I, J)=0.
6 TET(I, J)=0.
DO 12 M=1, MM
DO 12 N=1, NN
AM=3.1416*M/AA(1)
AN=3.1416*N/AA(2)
B(4,1)=AM*AM
B(5,1)=AN*AN
B(6,1)=-2.*AM*AN
B(4,2)=-AM
B(6,2)=AN
B(5,3)=-AN
B(6,3)=AM
B(1,4)=-AM
B(3,4)=AN
B(2,5)=-AN
B(3,5)=AM
CALL MTM (B, D, BD, 8, 5, 8)
CALL MUM (BD, B, STR, 5, 8, 5)
C=(1.-COS(3.1416*M))*(1.-COS(3.1416*N))
IF((C-0.5))7, 7, 8
7 C=0.

```

```

      GOTO 9
8  C=4.
9  P(1)=C*(PP+RK1*TN(1)+RK2*TN(2)+
    *AM*AM*TM(1)+AN*AN*TM(2))/(AM*AN)
    DO 10 I=1, NSIL
      S=SIN(AM*XP(1, I))*SIN(AN*XP(2, I))
10  P(1)=P(1)+S*PN(I)
      P(2)=-C*TM(1)/AN
      P(3)=-C*TM(2)/AM
      P(4)=-C*TN(1)/AN
      P(5)=-C*TN(2)/AM
      CALL GAUSS (STR, P, X, 5)
      DO 11 I=1, NR
        SM=SIN(AM*XR(1, I))
        CM=COS(AM*XR(1, I))
        SN=SIN(AN*XR(2, I))
        CN=COS(AN*XR(2, I))
        U(1, I)=U(1, I)+X(1)*SM*SN
        U(2, I)=U(2, I)+X(4)*CM*SN
        U(3, I)=U(3, I)+X(5)*SM*CN
        TET(1, I)=TET(1, I)+(X(2)-AM*X(1))*CM*SN
        TET(2, I)=TET(2, I)+(X(3)-AN*X(1))*SM*CN
        EP(1, I)=EP(1, I)+(RK1*X(1)-AM*X(4))*SM*SN
        EP(2, I)=EP(2, I)+(RK2*X(1)-AN*X(5))*SM*SN
        EP(3, I)=EP(3, I)+(AN*X(4)+AM*X(5))*CM*CN
        CA(1, I)=CA(1, I)+(AM*AM*X(1)-AM*X(2))*SM*SN
        CA(2, I)=CA(2, I)+(AN*AN*X(1)-AN*X(3))*SM*SN
        CA(3, I)=CA(3, I)+(-2.*AM*AN*X(1)+AN*X(2)+
          *AM*X(3))*CM*CN
        PS(1, I)=PS(1, I)+X(2)*CM*SN
11  PS(2, I)=PS(2, I)+X(3)*SM*CN
12  CONTINUE
      RETURN
      END

```

В качестве теста можно воспользоваться решением (4.27) для тонкой пластины симметричного строения. Ограничившись первым членом разложения  $m=n=1$ , получим коэффициенты уравнения

$$p_{1mn} = p \frac{4a_1 a_2}{\pi^2}; \quad k_{11} = \frac{\pi^4}{4a_1 a_2} \left[ D_{11} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{33}) + D_{22} \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \right]$$

и его решение

$$w_{11} = \frac{16pa_1^2 a_2^2}{\pi^6} \frac{1}{D_{11} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{33}) + D_{22} \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2}.$$

Для квадратной пластины  $a_1 = a_2 = a$  максимальное значение прогиба будет равно

$$w_{11} = \frac{16pa^4}{\pi^6} \frac{1}{D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{33}) + D_{22}}.$$

Для однородной квадратной пластины, образованной перекрестной укладкой  $[\pm \varphi]$  однонаправленных композитов, воспользовавшись нитяной моделью ( $E_1 = E$ ,  $E_2 = G_{12} = 0$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$ ), получим

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{12} \cos^4 \varphi; \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{12} \sin^4 \varphi; \quad D_{12} = D_{33} = \frac{Eh^3}{12} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

тогда

$$w_{11} = \frac{192}{\pi^5} \frac{p}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^3 \frac{a}{1 + \sin^2 \varphi}.$$

Для обработки полученных результатов и вычислений напряжений в осях систем координат, связанных с отдельными слоями, можно воспользоваться подпрограммой STRSL, описание которой приводится в примере 2.4. Поскольку в качестве исходных данных для подпрограммы STRSL требуются значения  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{21}$  и  $\kappa_{12}$ ,  $\kappa_{21}$ , а в подпрограмме PANEL вычисляются  $\gamma_{12}$  и  $\chi_{12}$ , то можно воспользоваться соотношениями (4.2)  $\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$ ,  $\chi_{12} = \kappa_{12} + \kappa_{21}$  и формально присвоить значения  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_{12}/2$ ;  $\kappa_{12} = \kappa_{21} = \chi_{12}/2$ .

### 4.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим прямоугольную пластину, у которой  $a \gg b$ . Для получения приближенного решения воспользуемся методом разделения переменных В. З. Власова и Л. В. Канторовича. Представим прогиб пластины и кривизны в следующем виде:

$$\begin{aligned} w &= W(x_1) f(x_2); \\ \kappa_1 &= -w_{,11} = -W'' f; \\ \kappa_2 &= -w_{,22} = -W f''; \\ \chi_{12} &= -2w_{,12} = -2W' f', \end{aligned} \quad (4.28)$$

где  $(\cdot)_{,1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\cdot)$ ,  $(1, 2)$ ;  $(\cdot)' = \frac{d}{dx_1} (\cdot)$ ;  $(\cdot)^* = \frac{d}{dx_2} (\cdot)$ .

$f(x_2)$  — функция, выбранная так, чтобы были удовлетворены, по крайней мере, геометрические граничные условия на продольных краях. Например, если продольные края свободно оперты, аппроксимирующую функцию  $f(x_2)$  можно выбрать в виде:

$$f(x_2) = \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^4 - 2 \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^3 + \frac{x_2}{a_2}.$$

Для защемленных продольных краев пластины аппроксимирующую функцию  $f(x_2)$  можно задать в форме

$$f(x_2) = \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 \left( 1 - \frac{x_2}{a_2} \right)^2.$$

Распределение изменений кривизн (4.28) запишем в матричном виде

$$\mathcal{E} = B_* L W, \quad (4.29)$$

где

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \chi_{12} \end{bmatrix}; \quad B_* = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & -f'' & 0 \\ 0 & 0 & -2f' \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} \nabla_1 \nabla_1 \\ 1 \\ \nabla_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\nabla_1 = \frac{d}{dx}$ .

Для прямоугольной пластины, нагруженной нормальным давлением, вариационная формулировка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} - \delta w p) dx_2 dx_1 = 0, \quad (4.30)$$

где

$$\delta \mathcal{E} = \mathbf{B}_* \mathbf{L} \delta W; \quad \mathcal{E} = \mathbf{B}_* \mathbf{L} W; \quad \delta w = f \delta W;$$

$\mathcal{D}$  — матрица изгибных жесткостей, структура которой приведена в соотношениях (4.26). Поскольку все функции, входящие в вариационное уравнение (4.30), определены по переменной  $x_2$ , то можно выполнить интегрирование по этой переменной. В результате получим одномерную формулировку задачи

$$\int_0^{a_1} ((\mathbf{L} \delta W)^T \mathcal{D}_* \mathbf{L} W - \delta W p_*) dx_1 = 0, \quad (4.31)$$

где

$$\mathcal{D}_* = \int_0^{a_2} \mathbf{B}_*^T \mathcal{D} \mathbf{B}_* dx_2; \quad p_* = \int_0^{a_2} p f dx_2.$$

Коэффициенты матрицы  $\mathcal{D}_*$  определяются так:

$$\mathcal{D}_* = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

где

$$d_{11} = \int_0^{a_2} D_{11} f^2 dx_2; \quad d_{12} = \int_0^{a_2} D_{12} f f'' dx_2; \\ d_{22} = \int_0^{a_2} D_{22} (f'')^2 dx_2; \quad d_{33} = 4 \int_0^{a_2} D_{33} (f')^2 dx_2.$$

Вариационная формулировка задачи (4.31) позволяет получить разрешающее дифференциальное уравнение, а также дает возможность построить конечно-элементную модель.

Для получения разрешающего дифференциального уравнения выполним интегрирование (4.31) по частям. При постоянных коэффициентах матрицы  $\mathcal{D}_*$  получим

$$\int_0^{a_1} (\delta W''' (d_{11} W'' + d_{12} W) + \delta W (d_{12} W'' + d_{22} W) +$$

$$\begin{aligned}
& + \delta W' d_{33} W' - \delta W p_* \, dx_1 = \int_0^{a_1} \delta W (d_{11} W^{IV} - (d_{33} - 2d_{12}) W'' + \\
& + d_{22} W - p_*) \, dx_1 + [\delta W' (d_{11} W'' + d_{12} W)]_0^{a_1} - \\
& - [\delta W (d_{11} W''' + (d_{12} - d_{33}) W')]_0^{a_1} = 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Из (4.33) следует разрешающее уравнение

$$W^{IV} - 2k_1^2 W'' + k_2^4 W = k_p, \tag{4.34}$$

где

$$2k_1^2 = \frac{d_{33} - 2d_{12}}{d_{11}}; \quad k_2^4 = \frac{d_{12}}{d_{11}}; \quad k_p = \frac{p_*}{d_{11}}.$$

Граничные условия для уравнения (4.34) записываются при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a_1$  следующим образом.

Если запрещен прогиб  $w$ , то  $W = 0$ .

Если прогиб  $w$  разрешается, то  $d_{11} W''' + (d_{12} - d_{33}) W' = 0$ .

Если запрещен угол поворота  $w_{,1} = 0$ , то  $W' = 0$ .

Если угол поворота разрешается, то  $d_{11} W'' + d_{12} W = 0$ .

Решение уравнения (4.34) можно записать в виде

$$W = \hat{W} + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_m, \tag{4.35}$$

где  $\hat{W}$  — частное решение, а функции  $\Phi_m$  определяются, как дано ниже.

Если  $k_1^2 < k_2^2$ , то

$$\Phi_1 = \operatorname{ch} r x_1 \cos t x_1; \quad \Phi_2 = \operatorname{sh} r x_1 \sin t x_1;$$

$$\Phi_3 = \operatorname{ch} r x_1 \sin t x_1; \quad \Phi_4 = \operatorname{sh} r x_1 \cos t x_1,$$

где  $r = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 + k_1^2)}$ ;  $t = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2)}$ .

Если  $k_1^2 > k_2^2$ , то

$$\Phi_1 = \operatorname{ch} r_1 x_1; \quad \Phi_2 = \operatorname{ch} r_2 x_1; \quad \Phi_3 = \operatorname{sh} r_1 x_1; \quad \Phi_4 = \operatorname{sh} r_2 x_1,$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4 - k_2^4}}.$$

Для случая равномерного давления частное решение  $\hat{W}$  равно  $\hat{W} = k_p / k_2^4$ .

Постоянные  $C_1 \dots C_4$  находятся из граничных условий.

Для построения квазиодномерного конечного элемента пластины воспользуемся вариационной формулировкой принципа возможных перемещений, аналогичной (4.31), записанной для отдельного элемента



$$\int_0^l ((L\delta W)^T \mathcal{D}_* L W - \delta W p_*) dx_1 - \delta q^T t = 0, \quad (4.36)$$

где  $l$  — размер конечного элемента вдоль оси  $ox_1$ ;  $\delta q = [\delta W_{(1)}, \delta W'_{(1)}, \delta W_{(2)}, \delta W'_{(2)}]^T$  — вектор-столбец возможных обобщенных узловых перемещений;  $t$  — вектор-столбец реакций.

Аппроксимацию функций  $\delta W$ ,  $W$  и вектор-столбца  $LW$  представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta W &= \Phi \delta q; \\ W &= \Phi q; \end{aligned} \quad (4.37)$$

где

$$LW = Bq,$$

$$q = [W_{(1)}, W'_{(1)}, W_{(2)}, W'_{(2)}]^T;$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]^T$$

$$B = L\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = 1 - 3x^2 + 2x^3; \quad \phi_2 = l(x - 2x^2 + x^3);$$

$$\phi_3 = 3x^2 - 2x^3; \quad \phi_4 = l(x^2 - x^3);$$

$$x = x_1/l; \quad (\cdot)' = \frac{d}{dx_1}(\cdot).$$

Подстановка (4.37) в (4.36) позволяет получить соотношения, связывающие реакции  $t$  с обобщенными узловыми перемещениями  $q$

$$t = Kq - P,$$

где

$$K = \int_0^l B^T \mathcal{D}_* B dx_1; \quad P = \int_0^l \Phi^T p_* dx_1$$

Полученные матрица  $K$  и вектор  $P$  представляют матрицу жесткости и вектор-столбец приведенных узловых сил для квазиодномерного конечного элемента прямоугольной пластины.

## 4.4. КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ МНОГОСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ

### 4.4.1. Теоретическое описание

На основе принципа возможных перемещений вариационную формулировку задачи статики для многослойной композитной оболочки можно записать в следующем виде:

$$\iint_S \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} \mathcal{E} dS - \iint_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} + \delta \mathcal{E}^T \mathcal{N}_T) dS - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \overline{\mathcal{N}} d\Gamma = 0, \quad (4.38)$$

где

$$\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}; \quad (4.39)$$

$dS = dx_1 dx_2$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор-столбец обобщенных перемещений;  $\mathcal{E}$  — вектор-столбец обобщенных деформаций;  $\mathbf{L}$  — матрица операторов деформационных соотношений (4.4);  $\mathbf{p}$  — вектор-столбец поверхностных нагрузок. Под  $\overline{\mathcal{N}}$  для конечного элемента будем понимать вектор-столбец распределенных реакций.

Для случая, когда оси упругой симметрии не совпадают с координатными линиями  $ox_1, ox_2$ , структуры матрицы приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$  и вектора-столбца температурных составляющих внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}_T$  будут следующими:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ & B_{22} & B_{23} & C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ & & B_{33} & C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & K_{11} & K_{12} \\ \text{сим.} & & & & & & & K_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, N_{12T}, M_{1T}, M_{2T}, M_{12T}, 0, 0]^T.$$

В формулировке задачи (4.38) подразумевается, что обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  определены через обобщенные перемещения  $\mathbf{u}$  (4.39). Если уравнение (4.39) использовать в качестве дополнительного условия связи  $\mathbf{L} \mathbf{u} - \mathcal{E} = 0$ , то, потребовав равенства нулю интегральной невязки  $\iint_S \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} (\mathbf{L} \mathbf{u} - \mathcal{E}) dS = 0$  для любых допустимых деформаций  $\delta \mathcal{E}$ , получим вариационную формулировку смешанного типа, аналогичную (1.82), (1.83)

$$\iint_S (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathcal{D} \mathcal{E} dS - f(\delta \mathbf{u}) = 0; \quad (4.41)$$

$$\iint_S \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} (\mathbf{L} \mathbf{u} - \mathcal{E}) dS = 0; \quad (4.42)$$

где

$$f(\delta \mathbf{u}) = \iint_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} + (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \mathcal{N}_T) dS + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \overline{\mathcal{N}} d\Gamma.$$

Таким образом, задачу удалось свести к следующей. Требуется определить такую пару вектор-функций  $u$  и  $\mathcal{E}$  из соответствующих множеств допустимых функций, для которых уравнения (4.41), (4.42) выполняются при любых  $\delta u$ ,  $\delta \mathcal{E}$ , принадлежащих тем же множествам.

При решении задачи статики многослойных панелей общего вида методом конечных элементов (МКЭ) на основе вариационных формулировок смешанного типа (4.41), (4.42) требования к выбору функций формы остаются такими же, как и в методе перемещений. В качестве функций формы конечного элемента наиболее часто используются алгебраические полиномы, порядок которых должен обеспечивать требуемую гладкость функций и их производных. В МКЭ важным требованием к функциям формы является требование воспроизводить в элементе однородное напряженно-деформированное состояние и, в частности, описывать смещение элемента как жесткого целого. Наиболее распространенный способ удовлетворения указанным требованиям состоит в повышении порядка аппроксимирующих полиномов. При этом используются полиномы более высокого порядка, чем это требуется, исходя из структуры вариационных уравнений, что приводит к увеличению обобщенных степеней свободы конечного элемента. Применение смешанных вариационных формулировок позволяет с помощью независимой аппроксимации деформаций и перемещений улучшить свойства конечных элементов.

Воспользуемся общим видом аппроксимации перемещений конечного элемента

$$u = \Phi q. \quad (4.43)$$

Аппроксимацию обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  запишем следующим образом:

$$\mathcal{E} = \omega \alpha, \quad (4.44)$$

где  $\Phi$ ,  $\omega$  — матрицы функций форм аппроксимаций;  $q$  — вектор-столбец обобщенных узловых перемещений элемента;  $\alpha$  — вектор-столбец коэффициентов аппроксимации обобщенных деформаций. Условия (4.41), (4.42) с учетом (4.43), (4.44) позволяют получить уравнения  $\delta q^T (G^T \alpha - P - t) = 0$ ;  $\alpha^T (Gq - H\alpha) = 0$ . Отсюда, учитывая производительность коэффициентов  $\delta q$ ,  $\delta \alpha$ , следует, что

$$G^T \alpha - P - t = 0; \quad (4.45)$$

$$Gq - H\alpha = 0, \quad (4.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G &= \iint_S \omega^T \mathcal{D} B dS; \quad H = \iint_S \omega^T \mathcal{D} \omega dS; \\ P &= \iint_S (\Phi^T p + B^T \mathcal{N}_T) dS; \quad t = \int_{\Gamma_\sigma} \Phi^T \bar{\mathcal{N}} d\Gamma; \quad B = L\Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

После исключения из уравнения (4.46) коэффициентов  $\alpha$  уравнение (4.45) примет вид

$$t = Kq - P, \quad (4.48)$$

где

$$K = G^T H^{-1} G \quad (4.49)$$

— определяет матрицу жесткости конечного элемента.

Число независимых смещений конечного элемента как твердого тела  $n_r$  равно шести, и ранг матрицы жесткости  $K$  должен равняться  $n_q - 6$ , где  $n_q$  — размерность вектора обобщенных узловых перемещений элемента. Это условие будет выполняться при выборе аппроксимации  $\mathcal{E}$  (4.44) такой, что  $n_\alpha = n_q - 6$ , где  $n_\alpha$  — размерность вектор-столбца коэффициентов аппроксимации  $\alpha$  (4.44). Для согласованной аппроксимации перемещений и деформаций (1.86) подходит треугольный конечный элемент с шестью узлами (рис. 4.4). Суммарное число обобщенных узловых перемещений  $n_q = 30$  при аппроксимации всех пяти компонент вектор-столбца  $u = [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T$  полными полиномами второго порядка. Суммарное число независимых компонент вектор-столбца  $\alpha$  (4.44) будет равно 24 при аппроксимации всех восьми компонент вектор-столбца  $\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T$  полными полиномами первого порядка.

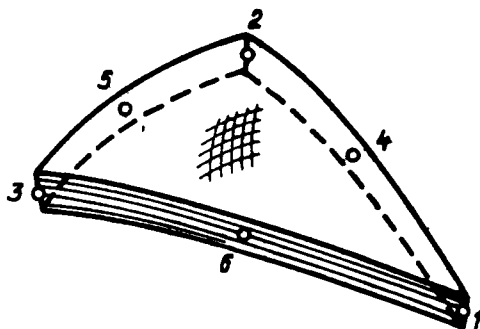


Рис. 4.4. Треугольный конечный элемент многослойной панели

Вектор-столбец обобщенных узловых перемещений  $q$  представим в виде

$$q_{(30)} = [q_{(1)}^T, q_{(2)}^T, \dots, q_{(6)}^T]^T, \quad (4.50)$$

где

$$q_{(i)}^{(5)} = [u_{1(i)}, u_{2(i)}, w_{(i)}, \theta_{1(i)}, \theta_{2(i)}]^T \quad (4.51)$$

— вектор-столбец обобщенных перемещений  $i$ -го узла. Индекс, заключенный в круглые скобки, указывает номер узла.

Матрица функций формы  $\Phi$  (см. (4.43)) имеет размерность  $(5 \times 30)$  и в блочном матричном виде записывается следующим образом:

$$\underset{(5 \times 30)}{\Phi} = [\underset{(5 \times 5)}{\Phi_{(1)}}, \underset{(5 \times 5)}{\Phi_{(2)}}, \dots, \underset{(5 \times 5)}{\Phi_{(6)}}], \quad (4.52)$$

где

$$\underset{(5 \times 5)}{\Phi}_{(i)} = \underset{(5 \times 5)}{\phi_i} E;$$

$E$  — единичная матрица размерности  $(5 \times 5)$ ;  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \dots, 6$ ) — квадратичные функции формы. Для представления  $\phi_i$  удобно воспользоваться естественными безразмерными (барицентричными) координатами [17].

$$\begin{aligned} \phi_1 &= L_1(2L_1 - 1); & \phi_2 &= L_2(2L_2 - 1); & \phi_3 &= L_3(2L_3 - 1); \\ \phi_4 &= 4L_1L_2; & \phi_5 &= 4L_2L_3; & \phi_6 &= 4L_3L_1. \end{aligned}$$

Нумерация функций формы соответствует нумерации узлов элемента. Примерный вид функций  $\phi_1$  и  $\phi_4$  показан на рис. 4.5.

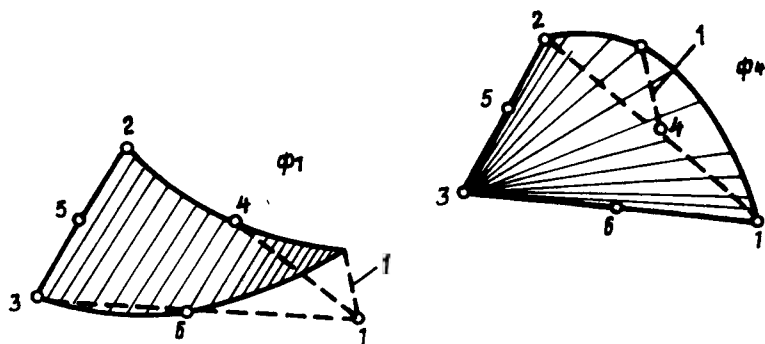


Рис. 4.5. Примеры функций, аппроксимирующих перемещения в конечном элементе

Естественные координаты  $L_i$  определяются через координаты  $x_1, x_2$  следующим образом:

$$L_i = \frac{1}{2S} (a_{(i)} + b_{(i)}x_1 + c_{(i)}x_2) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.54)$$

где

$$a_{(1)} = x_{1(2)}x_{2(3)} - x_{1(3)}x_{2(2)}; \quad (1, 2, 3);$$

$$b_{(1)} = x_{2(2)} - x_{2(3)}, \quad (1, 2, 3);$$

$$c_{(1)} = x_{1(3)} - x_{1(2)}, \quad (1, 2, 3);$$

$$2S = b_{(1)}c_{(2)} - b_{(2)}c_{(1)};$$

$x_{1(i)}, x_{2(i)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) — координаты  $x_1$  и  $x_2$  вершин треугольника. Остальные коэффициенты  $a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}$  получаются с помощью круговой перестановки индексов, заключенных в круглые скобки. Коэффициент  $S$  равен площади треугольного элемента. Для обратных соотношений справедливо

$$x_1 = x_{1(1)}L_1 + x_{1(2)}L_2 + x_{1(3)}L_3;$$

$$x_2 = x_{2(1)}L_1 + x_{2(2)}L_2 + x_{2(3)}L_3.$$

В развернутом виде аппроксимация любой компоненты вектор-столбца  $u$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2) = & L_1(2L_1-1)\Phi_{(1)} + L_2(2L_2-1)\Phi_{(2)} + \\ & + L_3(2L_3-1)\Phi_{(3)} + 4L_1L_2\Phi_{(4)} + 4L_2L_3\Phi_{(5)} + \\ & + 4L_3L_1\Phi_{(6)},\end{aligned}$$

где под  $\Phi$  может выступать любая функция из списка ( $u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2$ ).

Размерность вектора  $\alpha$  согласно сделанным выше замечаниям должна равняться  $n_\alpha = n_q - 6 = 24$ . Поскольку размерность вектор-столбца  $\mathcal{E}$  (4.44) равна 8, то на конечном элементе можно принять аппроксимацию всех компонент  $\mathcal{E}$  в виде полных линейных полиномов, т. е.

$\Phi(x_1, x_2) = L_1\Phi_{(1)} + L_2\Phi_{(2)} + L_3\Phi_{(3)}$ , где под  $\Phi$  может выступать любая функция из списка ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \varkappa_1, \varkappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2$ ). В качестве компонент вектор-столбца  $\alpha$  выступают

$$\alpha = [\varepsilon_{1(1)}, \varepsilon_{1(2)}, \varepsilon_{1(3)}, \varepsilon_{2(1)}, \varepsilon_{2(2)}, \varepsilon_{2(3)}, \gamma_{12(1)}, \gamma_{12(2)}, \gamma_{12(3)},$$

$$\varkappa_{1(1)}, \varkappa_{1(2)}, \varkappa_{1(3)}, \varkappa_{2(1)}, \varkappa_{2(2)}, \varkappa_{2(3)}, \chi_{12(1)}, \chi_{12(2)}, \chi_{12(3)},$$

$$\psi_{1(1)}, \psi_{1(2)}, \psi_{1(3)}, \psi_{2(1)}, \psi_{2(2)}, \psi_{2(3)}]^T.$$

При такой последовательности компонент вектор-столбца  $\alpha$  матрица  $\omega$  размерностью  $(8 \times 24)$  (4.44) будет иметь блочную диагональную структуру:

$$\omega = [F, F, F, F, F, F, F, F], \quad (4.55)$$

( $8 \times 24$ )

где

$$F = [L_1, L_2, L_3].$$

( $1 \times 3$ )

Для вычисления матрицы жесткости  $K$  конечного элемента многослойной оболочки (4.49) необходимо располагать информацией о матрицах  $B, H, G$  (4.47).

Матрицу  $B$  размерностью  $(8 \times 30)$  с учетом блочной структуры матрицы функций форм  $\Phi$  (4.52) можно представить в виде

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{(1)}, \mathbf{B}_{(2)}, \dots, \mathbf{B}_{(6)}], \quad (4.56)$$

$(8 \times 30)$

где матричные блоки  $\mathbf{B}_{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) определяются соотношением  $\mathbf{B}_{(i)} = \mathbf{L} \Phi_{(i)}$  при ( $i=1, 2, \dots, 6$ ), где  $\mathbf{L}$  — матрица дифференциальных операторов в деформационных соотношениях  $\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}$  (см. (4.4)). В блочном виде матрицу  $\mathbf{B}_{(i)}$  удобно представить так:

$$\mathbf{B}_{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11(i)} & \mathbf{0}_{(3 \times 2)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{b}_{22(i)} \\ \mathbf{b}_{31(i)} & \mathbf{b}_{32(i)} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 6), \quad (4.57)$$

$(8 \times 5)$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{11(i)} &= \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & 0 & k_1 \phi_i \\ 0 & \phi_{i,2} & k_2 \phi_i \\ \phi_{i,2} & \phi_{i,1} & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{b}_{22(i)} &= \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & 0 \\ 0 & \phi_{i,2} \\ \phi_{i,2} & \phi_{i,1} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{b}_{31(i)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_{i,1} \\ 0 & 0 & \phi_{i,2} \end{bmatrix}; & \mathbf{b}_{32(i)} &= \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix}; \\ \phi_{i,1} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \quad (1, 2). \end{aligned}$$

$(3 \times 3)$        $(3 \times 2)$        $(2 \times 3)$        $(2 \times 2)$

Индекс вида  $(3 \times 3)$  определяет размерность матрицы. При вычислении производных  $\phi_{i,1}$ ,  $\phi_{i,2}$  от квадратичных функций аппроксимации (4.53) следует воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \phi_{i,1} &= \frac{b(i)}{2S} (4L_i - 1); & \phi_{i,2} &= \frac{c(i)}{2S} (4L_i - 1), \quad (i=1, 2, 3); \\ \phi_{4,1} &= \frac{2}{S} (b_{(1)}L_2 + b_{(2)}L_1); & \phi_{5,1} &= \frac{2}{S} (b_{(2)}L_3 + b_{(3)}L_2); \\ \phi_{6,1} &= \frac{2}{S} (b_{(3)}L_1 + b_{(1)}L_3); & \phi_{4,2} &= \frac{2}{S} (c_{(1)}L_2 + c_{(2)}L_1); \\ \phi_{5,2} &= \frac{2}{S} (c_{(2)}L_3 + c_{(3)}L_2); & \phi_{6,2} &= \frac{2}{S} (c_{(3)}L_1 + c_{(1)}L_3). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Учитывая блочную структуру матриц  $\mathbf{B}$  (4.56),  $\mathcal{D}$  (4.40),  $\omega$  (4.55), матрицу  $\mathbf{G}$   $(24 \times 30)$  (4.47) удобно представить в следующем виде:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_{(1)}, \mathbf{G}_{(2)}, \dots, \mathbf{G}_{(6)}], \quad (4.59)$$

$(24 \times 30)$

где матрицы  $\mathbf{G}_{(i)}$  размерностью  $(24 \times 5)$  состоят из блоков

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11(i)} & \mathbf{g}_{12(i)} \\ \mathbf{g}_{21(i)} & \mathbf{g}_{22(i)} \\ \mathbf{g}_{31(i)} & \mathbf{g}_{32(i)} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 6); \\ \mathbf{g}_{11(i)} &= \iint_S \omega_B \mathbf{b}_{11(i)} dS; & \mathbf{g}_{12(i)} &= \iint_S \omega_C \mathbf{b}_{22(i)} dS; \end{aligned}$$

$(9 \times 3)$        $(9 \times 2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{21(i)}^{(9 \times 3)} &= \iint_S \omega_C \mathbf{b}_{11(i)} dS; & \mathbf{g}_{22(i)}^{(9 \times 2)} &= \iint_S \omega_D \mathbf{b}_{22(i)} dS; \\
\mathbf{g}_{31(i)}^{(6 \times 3)} &= \iint_S \omega_K \mathbf{b}_{31(i)} dS; & \mathbf{g}_{32(i)}^{(6 \times 2)} &= \iint_S \omega_K \Phi_i dS; \\
\omega_B &= \begin{bmatrix} B_{11} \mathbf{F}^T & B_{12} \mathbf{F}^T & B_{13} \mathbf{F}^T \\ B_{12} \mathbf{F}^T & B_{22} \mathbf{F}^T & B_{23} \mathbf{F}^T \\ B_{13} \mathbf{F}^T & B_{23} \mathbf{F}^T & B_{33} \mathbf{F}^T \end{bmatrix}, & (B, C, D); \\
\omega_K &= \begin{bmatrix} K_{11} \mathbf{F}^T & K_{12} \mathbf{F}^T \\ K_{11} \mathbf{F}^T & K_{22} \mathbf{F}^T \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Перестановкой  $(B, C, D)$  указывается, что матрицы  $\omega_C, \omega_D$  имеют аналогичную структуру с матрицей  $\omega_B$ , однако, множителями при матрице  $\mathbf{F}^T$  выступают жесткости  $C_{ij}$  и  $D_{ij}$ .

Для случая постоянных жесткостей в пределах конечного элемента матрица  $\mathbf{H}$  (4.47) обращается достаточно просто. В блочном виде матрицу  $\mathbf{H}^{-1}$  размерностью  $(24 \times 24)$  можно представить следующим образом:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} H_B^{11} & H_B^{12} & H_B^{13} & H_C^{11} & H_C^{12} & H_C^{13} & 0 & 0 \\ & H_B^{22} & H_B^{23} & H_C^{12} & H_C^{22} & H_C^{23} & 0 & 0 \\ & & H_B^{33} & H_C^{13} & H_C^{23} & H_C^{33} & 0 & 0 \\ & & & H_D^{11} & H_D^{12} & H_D^{13} & 0 & 0 \\ & & & & H_D^{22} & H_D^{23} & 0 & 0 \\ & & & & & H_D^{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & H_K^{11} & H_K^{12} \\ \text{сим.} & & & & & & & H_K^{22} \end{bmatrix}, \tag{4.61}$$

где

$$\mathbf{H}_B^{ij} = \bar{B}_{ij} \left( \iint_S \mathbf{F}^T \mathbf{F} dS \right)^{-1}, \quad (B, C, D, K); \tag{4.62}$$

$\bar{B}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{D}_{ij}$  — коэффициенты матрицы приведенных податливостей многослойного пакета  $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \\ \text{сим.} & & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix}; \\
\bar{\mathbf{D}} &= (\mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1}; & \bar{\mathbf{C}} &= -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \bar{\mathbf{D}}; \\
\bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \bar{\mathbf{C}}^T; & \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}^{-1};
\end{aligned} \tag{4.63}$$



$$\mathbf{B}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}; \quad (B, C, D); \quad \mathbf{K}_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, удается заменить обращение матрицы  $\mathbf{H}$  размерностью  $(24 \times 24)$  операциями (4.62) и (4.63) с матрицами меньшей размерности, что приводит к существенному снижению вычислительных затрат.

Вектор-столбец приведенных узловых сил конечного элемента (4.47) удобно представить в блочном виде

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{(1)}^T, \mathbf{P}_{(2)}^T, \dots, \mathbf{P}_{(6)}^T]^T, \quad (4.64)$$

где

$$\mathbf{P}_{(i)} = \iint_S \boldsymbol{\Phi}_{(i)}^T \mathbf{p} dS + \mathbf{P}_{\tau(i)};$$

$$\mathbf{P}_{\tau(i)} = \iint_S \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11(i)}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{22(i)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\tau \\ \mathbf{M}_\tau \end{bmatrix} dS;$$

$$\mathbf{N}_\tau = [N_{1\tau}, N_{2\tau}, N_{12\tau}]^T; \quad \mathbf{M}_\tau = [M_{1\tau}, M_{2\tau}, M_{12\tau}]^T.$$

Для интегрирования по треугольной области удобно пользоваться квадратурными формулами и подпрограммой KSIW3 (см. приложение 1).

После выполнения общих процедур МКЭ и определения узловых обобщенных перемещений  $\mathbf{q}$  можно вычислить обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  в любой точке конечного элемента

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q}.$$

Например, при выводе результатов в центре тяжести треугольного элемента ( $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$ ) получим

$$\mathcal{E} = \mathbf{B}_* \mathbf{q}, \quad (4.65)$$

где  $i, j$ -й элемент матрицы  $\mathbf{B}_*$  будет вычисляться следующим образом:

$$b_{*ij} = \frac{1}{3} \sum_{m=m_1}^{m_2} W_m j,$$

где

$$m_1 = 3(i-1) + 1; \quad m_2 = m_1 + 2;$$

$W_m$  —  $m, j$ -й элемент матрицы  $\mathbf{W} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$ .

#### 4.4.2. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости

Составим подпрограмму вычисления матрицы жесткости и вектора приведенных узловых сил треугольного конечного элемента многослойной панели. В качестве исходных данных примем:

RK1, RK2 — главные кривизны  $k_1, k_2$ . XT(3,2) — массив координат вершин треугольного элемента. В  $i$ -й строке массива последовательно размещаются координаты  $i$ -й вершины:

$$XT(i, 1) = x_{1(i)}; XT(i, 2) = x_{2(i)},$$

D(8,8) — массив приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета (матрица  $\mathcal{D}$ (4.40)); PP(3) — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца поверхностных нагрузок  $p_1, p_2, p_3$  (4.7); TN(3) — массив, содержащий коэффициенты температурных составляющих погонных сил:  $N_{1T}, N_{2T}, N_{12T}$  (4.64); TM(3) — массив, содержащий коэффициенты температурных составляющих погонных моментов:  $M_{1T}, M_{2T}, M_{12T}$  (4.64).

В результате работы подпрограммы STPAN получим:

BB(8,30) — массив соответствует матрице  $B_*$  (4.65), связывающей обобщенные деформации (в центре тяжести конечного элемента) с узловыми обобщенными перемещениями; ST(30,30) — массив, содержащий коэффициенты матрицы жесткости  $K$  (4.49); P(30) — массив, содержащий коэффициенты вектора приведенных узловых сил (4.47), (4.64).

При работе подпрограммы STPAN используются подпрограммы MUM, MTM, MATIN (см. приложение 2) и подпрограмма KSIW3 (приложение 1).

Для удобства чтения текста подпрограммы STPAN в табл. 4.1 приводятся наименования некоторых рабочих массивов и соответствующих им матриц.

Таблица 4.1

**Рабочие массивы подпрограммы STPAN и соответствующие матрицы**

| Идентификаторы и размерности массивов                         | Обозначения в тексте раздела 4.4.4                                        |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| A(3), B(3), C(3), TL(3),<br>F(6), F1(6), F2(6)                | $a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}, L_{(i)},$<br>$\phi_i, \phi_{i,1}, \phi_{i,2}$ |
| OMB(9,3), OMC(9,3), OMD(9,3),<br>OMK(6,2)                     | $\omega_B, \omega_C, \omega_D,$<br>$\omega_K$                             |
| B11(3,3), B22(3,3), B31(3,3)                                  | $b_{11(i)}, b_{22(i)}, b_{31(i)}$                                         |
| G11(9,3), G12(9,3), G21(9,3),<br>G22(9,2), G31(6,3), G32(6,2) | $g_{11(i)}, g_{12(i)}, g_{21(i)},$<br>$g_{22(i)}, g_{31(i)}, g_{32(i)}$   |
| B3(3,3), C3(3,3), D3(3,3), G2(2,2)                            | $B, C, D, K_{(2 \times 2)}$                                               |
| OD(3,3), OC(3,3), OB(3,3), OG(2,2)                            | $\bar{D}, \bar{C}, \bar{B}, R_{(2 \times 2)}$                             |
| HH(24,24)                                                     | $H^{-1}$                                                                  |
| HG(23,30)                                                     | $H^{-1} G$                                                                |

Последовательность работы подпрограммы STPAN можно укрупненно представить по алгоритму рис. 4.6.

Замечание: все действительные переменные в подпрограммах STPAN, MUM, MTM, MATIN, KSIW3 должны быть описаны как переменные «двойной точности», т. е. во все указанные подпрограммы перед описанием DIMENSION необходимо поместить: IMPLICIT REAL\*8 (A—H, O—Z)

SUBROUTINE STPAN(RK1, RK2, XT, D,

\* PP, TN, TM, BB, ST, P)

IMPLICIT REAL\*8(A—H, O—Z)

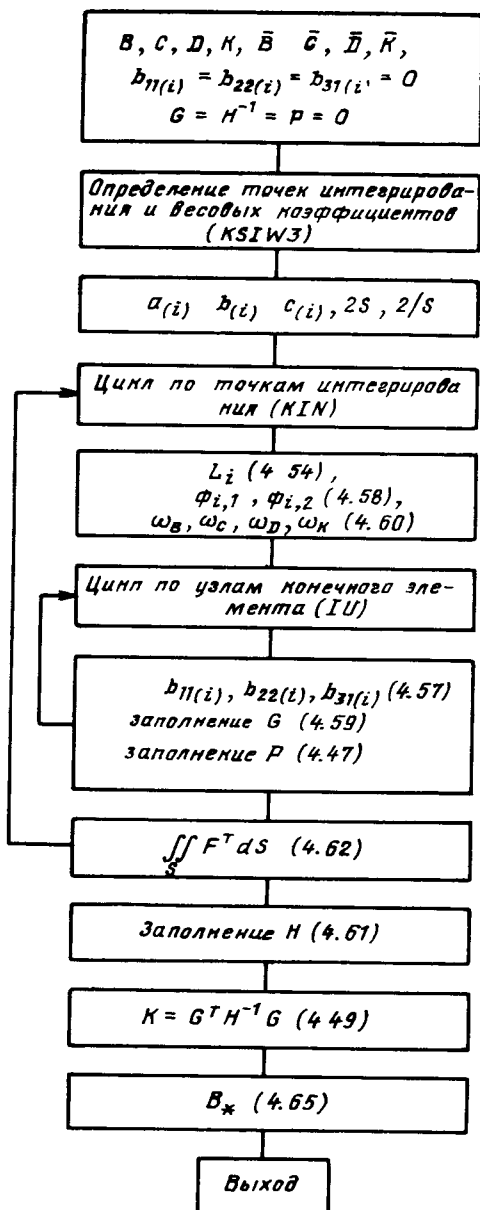


Рис. 4.6. Блок-схема подпрограммы вычисления матрицы жесткости для треугольного конечного элемента многослойной панели

- DIMENSION XT(3,2), D(8,8), PP(3), TN(3), TM(3),  
 \* BB(8,30), ST(30,30), P(30), II(4), A(3), B(3),  
 \* C(3), TL(3), F(6), F1(6), F2(6), OMB(9,3), OMC(9,3),

```

* OMD(9,3), OMK(6,2), B11(3,3), B22(3,2), B31(2,3),
* G11(9,3), G12(9,2), G21(9,3), G22(9,2), G31(6,3),
* G32(6,2), FTF(3,3), W(7), XY(7,2), X(2), PNT(3),
* PMT(2), B3(3,3), C3(3,3), D3(3,3), G2(2,2),
* B3M(3,3), BMC(3,3), OD3(3,3), OD(3,3), OC(3,3),
* OB(3,3), OG(2,2), HH(24,24), G(24,30), HG(24,30)
DO 100 I=1,3
I4=I+3
DO 101 J=1,3
J4=J+3
B3(I,J)=D(I,J)
C3(I,J)=D(I,J4)
D3(I,J)=D(I4,J4)
101 FTF(I,J)=0.
DO 102 J=1,2
B22(I,J)=0.
102 B31(J,I)=0.
100 CONTINUE
G2(1,1)=D(7,7)
G2(1,2)=D(7,8)
G2(2,1)=D(8,7)
G2(2,2)=D(8,8)
CALL MATIN(B3, B3M, 3)
CALL MATIN(G2, OG, 2)
CALL MUM(B3M, C3, BMC, 3, 3, 3)
CALL MUM(C3, BMC, OD3, 3, 3, 3)
DO 23 I=1,3
DO 23 J=1,3
B3(I,J)=D(I,J)
23 OD3(I,J)=D3(I,J)-OD3(I,J)
CALL MATIN(OD3, OD, 3)
CALL MUM(BMC, OD, OC, 3, 3, 3)
DO 24 I=1,3
DO 24 J=1,3
OC(I,J)=-OC(I,J)
24 B11(J,I)=OC(I,J)
CALL MUM(BMC, B11, OB, 3, 3, 3)
DO 25 I=1,3
DO 25 J=1,3
B11(I,J)=0.
25 OB(I,J)=B3M(I,J)-OB(I,J)
G2(1,1)=D(7,7)
G2(1,2)=D(7,8)
G2(2,1)=D(8,7)
G2(2,2)=D(8,8)
DO 4 I=1,30
P(I)=0.
DO 4 J=1,24
4 G(J,I)=0.
DO 5 I=1,24
DO 5 J=1,24
5 HH(I,J)=0.
II(1)=2
II(2)=3
II(3)=1
II(4)=2
NIN=7
CALL KSIW3(NIN, XT, W, XY)
DO 6 I=1,3
I2=II(I)

```

```

I3=II(I+1)
A(I)=XT(I2,1)*XT(I3,2)-XT(I3,1)*XT(I2,2)
B(I)=XT(I2,2)-XT(I3,2)
6 C(I)=XT(I3,1)-XT(I2,1)
S2=B(1)*C(2)-B(2)*C(1)
DS=4./S2
DO 22 KIN=1, NIN
WKIN=W(KIN)
X(1)=XY(KIN,1)
X(2)=XY(KIN,2)
DO 7 I=1,3
7 TL(I)=(A(I)+B(I)*X(1)+C(I)*X(2))/S2
DO 8 I=1,3
I2=II(I)
I4=I+3
F(I)=TL(I)*(2.*TL(I)-1.)
F(I4)=4.*TL(I)*TL(I2)
TLS=(4.*TL(I)-1.)/S2
F1(I)=B(I)*TLS
F2(I)=C(I)*TLS
F1(I4)=DS*(B(I)*TL(I2)+B(I2)*TL(I))
8 F2(I4)=DS*(C(I)*TL(I2)+C(I2)*TL(I))
DO 9 I=1,3
IK=3*(I-1)
DO 9 J=1,3
DO 9 K=1,3
IIK=IK+K
OMB(IIK,J)=B3(I,J)*TL(K)
OMC(IIK,J)=C3(I,J)*TL(K)
9 OMD(IIK,J)=D3(I,J)*TL(K)
DO 10 K=1,3
K4=K+3
OMK(K,1)=G2(1,1)*TL(K)
OMK(K,2)=G2(1,2)*TL(K)
OMK(K4,1)=OMK(K,2)
10 OMK(K4,2)=G2(2,2)*TL(K)
DO 20 IU=1,6
B11(1,1)=F1(IU)
B11(1,3)=RK1*F(IU)
B11(2,2)=F2(IU)
B11(2,3)=RK2*F(IU)
B11(3,1)=F2(IU)
B11(3,2)=F1(IU)
B22(1,1)=F1(IU)
B22(2,2)=F2(IU)
B22(3,1)=F2(IU)
B22(3,2)=F1(IU)
B31(1,3)=F1(IU)
B31(2,3)=F2(IU)
JU1=5*(IU-1)
JU2=JU1+3
CALL MUM(OMB, B11, G11, 9, 3, 3)
CALL MUM(OMC, B22, G12, 9, 3, 2)
CALL MUM(OMC, B11, G21, 9, 3, 3)
CALL MUM(OMD, B22, G22, 9, 3, 2)
CALL MUM(OMK, B31, G31, 6, 2, 3)
DO 11 I=1,6
DO 11 J=1,2
11 G32(I,J)=F(IU)*OMK(I,J)
DO 12 I=1,9

```

```

I10=I+9
DO 13 J=1,3
JJ=JU1+J
G(I, JJ)=G(I, JJ)+G11(I, J)*WKIN
13 G(I 10, JJ)=G(I 10, JJ)+G21(I, J)*WKIN
DO 14 J=1,2
JJ=JU2+J
G(I, JJ)=G(I, JJ)+G12(I, J)*WKIN
14 G(I10, JJ)=G(I10, JJ)+G22(I, J)*WKIN
12 CONTINUE
DO 15 I=1,6
I 19=I+18
DO 16 J=1,3
JJ=JU1+J
16 G(I19, JJ)=G(I19, JJ)+G31(I, J)*WKIN
DO 17 J=1,2
JJ=JU2+J
17 G(I19, JJ)=G(I19, JJ)+G32(I, J)*WKIN
15 CONTINUE
CALL MTM (B11, TN, PNT, 3, 3, 1)
CALL MTM (B22, TM, PMT, 3, 2, 1)
DO 18 I=1,3
JJ=JU1+I
18 P(JJ)=P(JJ)+(PP(I)*F(IU)+PNT(I))*WKIN
DO 19 I=1,2
JJ=JU2+I
19 P(JJ)=P(JJ)+PMT(I)*WKIN
20 CONTINUE
DO 21 I=1,3
DO 21 J=1,3
21 FTF(I, J)=FTF(I, J)+TL(I)*TL(J)*WKIN
22 CONTINUE
DO 30 I=1,3
DO 30 J=1,3
30 B3M(I, J)=FTF(I, J)
CALL MATIN (B3M, FTF, 3)
DO 26 I=1,3
IBB=3*(I-1)
IDD=IBB+9
ICC=IBB
DO 26 J=1,3
JBB=3*(J-1)
JCC=JBB+9
JDD=JCC
OBIJ=OB(I, J)
OCIJ=OC(I, J)
ODIJ=OD(I, J)
OCJI=OC(J, I)
DO 26 K1=1,3
IBK=IBB+K1
ICK=ICC+K1
IDK=IDD+K1
DO 26 K2=1,3
JBK=JBB+K2
JCK=JCC+K2
JDK=JDD+K2
FF=FTF(K1, K2)
HH(IBK, JBK)=OBIJ*FF
HH(ICK, JCK)=OCIJ*FF
HH(IDK, JDK)=ODIJ*FF

```

```

26 HH(JCK, ICK) = OCJI * FF
   DO 27 I = 1, 3
   I19 = I + 18
   I22 = I + 21
   DO 27 J = 1, 3
   J19 = J + 18
   J22 = J + 21
   FF = FTF(I, J)
   HH(I19, J19) = OG(1, 1) * FF
   HH(I19, J22) = OG(1, 2) * FF
   HH(I22, J19) = OG(2, 1) * FF
27 HH(I22, J22) = OG(2, 2) * FF
   CALL MUM (HH, G, HG, 24, 24, 30)
   CALL MTM (G, HG, ST, 24, 30, 30)
   DO 28 I = 1, 8
   K1 = 3 * (I - 1) + 1
   K2 = K1 + 2
   DO 28 J = 1, 30
   FF = 0.
   DO 29 K = K1, K2
29 FF = FF + HG(K, J)
28 BB(I, J) = FF / 3.
   RETURN
   END

```

## 4.5. УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

### 4.5.1. Вариационные формулировки задачи устойчивости многослойной пластины

Одним из распространенных видов нагружения многослойных пластин, работающих в качестве силовых элементов конструкций, является воздействие нормальных сжимающих или касательных усилий, которые могут привести к потере устойчивости плоской формы равновесия.

Рассмотрим вариационную формулировку задачи устойчивости многослойной пластины. Воспользуемся энергетическим критерием устойчивости Брайана (2.146):

$$\iint_S (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{N} - \Lambda \delta \omega^T \mathcal{N}_0 \omega) dS = 0, \quad (4.66)$$

где

$$\mathcal{N}_0 = - \begin{bmatrix} N_1^0 & N_{12}^0 \\ N_{12}^0 & N_2^0 \end{bmatrix}; \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = -\omega_{,1} \quad (1, 2);$$

$\mathcal{E}$  — вектор-столбец обобщенных деформаций;  $\mathcal{N} = \mathcal{D}\mathcal{E}$  — вектор-столбец обобщенных внутренних силовых факторов;  $\mathcal{D}$  — матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета;  $N_1^0$ ;  $N_2^0$ ;  $N_{12}^0$  — начальные погонные усилия в пластине, определяющиеся решением задачи статики;  $\Lambda$  — параметр нагружения (нагружение предполагается пропорциональным,

начальные усилия вычисляются при  $\Lambda=1$ );  $\omega_i$  ( $i=1, 2$ ) — углы поворота нормали.

Для получения уравнений смежного равновесного состояния следует  $\delta\mathcal{E}$  и  $\delta\omega$  выразить через возможные (дополнительные) перемещения

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}; \quad \delta\omega = \mathbf{R}\delta\mathbf{u}, \quad (4.67)$$

подставить (4.67) в уравнение (4.66) и выполнить интегрирование по частям. В результате выполнения этих процедур получим

$$\iint_S \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{L}^* \mathcal{N} - \Lambda \mathbf{R}^* (\mathcal{N}_0 \omega)) dS + \iint_F \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{L}^\nu \mathcal{N} - \Lambda \mathbf{R}^\nu \mathcal{N}_0 \omega) d\Gamma = 0.$$

Отсюда следуют уравнения равновесия

$$\mathbf{L}^* \mathcal{N} - \Lambda \mathbf{R}^* (\mathcal{N}_0 \omega) = 0 \text{ на поверхности } S \quad (4.68)$$

и естественные (силовые) граничные условия

$$\mathbf{L}^\nu \mathcal{N} - \Lambda \mathbf{R}^\nu \mathcal{N}_0 \omega = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma. \quad (4.69)$$

Следует помнить, что под  $\mathcal{N}$  понимаются дополнительные силовые факторы, которые появляются в пластине при переходе от плоской формы к изгибающей. Поскольку перемещения  $\mathbf{u}$  считаются дополнительными, то на закрепленной части контура  $\Gamma_u$  главные (или геометрические) граничные условия будут однородными, т. е.  $\mathbf{u}=0$  на  $\Gamma_u$ .

В общем случае для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{L}$ , соответствующих (4.4) при  $k_i = 0$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и согласно (4.68) получим следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad (1, 2);$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0, \quad (1, 2);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left( N_1^0 \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) -$$

$$- \Lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left( N_2^0 \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0,$$

и силовые граничные условия на  $\Gamma_\sigma$

$$l_1 N_1 + l_2 N_{12} = 0, \quad (1, 2);$$

$$l_1 M_1 + l_2 M_{12} = 0, \quad (1, 2);$$

$$l_1 \left( Q_1 - \Lambda \left( N_1^0 \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right) +$$



$$+L_2 \left( Q_2 - \Lambda \left( N_2^0 \frac{\partial w}{\partial x_2} + N_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right) = 0.$$

Вариационную формулировку задачи можно записать через перемещения. Для этого уравнение (4.66) следует записать с учетом (4.67) и подставить  $\mathcal{N} = \mathcal{D}Lu$  и  $\omega = Ru$ . В результате этих подстановок получим

$$\iint_S ((L\xi u)^T \mathcal{D}Lu - \Lambda (R\delta u)^T \mathcal{N}_0 Ru) dS = 0. \quad (4.70)$$

Уравнение (4.70) соответствует условию стационарности функционала изменения полной потенциальной энергии  $\Delta J$

$$\Delta J = \frac{1}{2} \iint_S ((Lu)^T \mathcal{D}Lu - \Lambda (Ru)^T \mathcal{N}_0 Ru) dS = 0,$$

т. е.  $\delta(\Delta J) = 0$  и может использоваться как для получения разрешающих уравнений в перемещениях, так и для построения приближенных решений задачи устойчивости многослойных пластин.

#### 4.5.2. Устойчивость толстой свободно опертой многослойной пластины

Рассмотрим последовательность решения задачи об определении критических нагрузок прямоугольной свободно опертой многослойной пластины несимметричного строения при двухосном равномерном сжатии\*. Расчет проведем с учетом деформаций поперечного сдвига. Так же, как и при решении задачи статики (раздел 4.2.1), для свободно опертой многослойной пластины в вектор-столбец обобщенных перемещений вместо углов поворота сечений  $\theta_1, \theta_2$  можно включить средние деформации поперечных сдвигов  $\psi_1, \psi_2$ . В этом случае при численной реализации на ЭВМ с помощью одной программы можно выполнить расчет как толстых, так и тонких многослойных пластин.

В качестве компонент вектор-столбца обобщенных перемещений примем  $X = [\omega, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2]^T$ . Обобщенными деформациями и внутренними силовыми факторами будут выступать

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2]^T.$$

Будем считать, что оси упругой симметрии материалов слоев параллельны осям  $ox_1, ox_2$ , тогда матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета будет такой же,

\* Для многослойных пластин несимметричной структуры сжатие сопровождается изгибом. При нагрузках, близких к критическим, возможно пере-  
строение изгибных форм равновесия.

как и матрица  $\mathcal{D}$  для соотношений упругости (4.6). Таким образом, для исходной вариационной формулировки задачи устойчивости (4.66) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{D}\mathcal{E}; \quad \mathcal{E} = \mathbf{L}_x \mathbf{X}; \quad \omega = \mathbf{R}_x \mathbf{X}; \\ \delta \mathcal{E} &= \mathbf{L}_x \delta \mathbf{X}; \quad \delta \omega = \mathbf{R}_x \delta \mathbf{X}; \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ -\nabla_1 \nabla_1 & \nabla_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 \nabla_2 & 0 & \nabla_2 & 0 & 0 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 & \nabla_2 & \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T_1^0 & 0 \\ 0 & T_2^0 \end{bmatrix},$$

где  $T_1^0, T_2^0$  — погонные сжимающие нагрузки. И окончательный вид формулировки будет следующим:

$$\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} (\mathbf{L}_x \delta \mathbf{X})^T \mathcal{D} \mathbf{L}_x \mathbf{X} - \Lambda (\mathbf{R}_x \delta \mathbf{X})^T \mathcal{N}_0 \mathbf{R}_x \mathbf{X} dx_1 dx_2 = 0.$$

Воспользовавшись разложением решений в двойные тригонометрические ряды (4.15), можно обнаружить, что относительно отдельных гармоник разложения система разрешающих уравнений, полученная на основе (4.6), (4.71), оказывается несвязанной. Для отдельной  $m, n$ -й гармоники волнообразования можно решать следующую обобщенную задачу на собственные значения:

$$(\mathbf{K}_{mn} - \lambda \mathbf{S}_{mn}) \mathbf{X}_{mn} = 0, \quad (4.72)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{mn} &= \frac{a_1 a_2}{4} \mathbf{B}_{mn}^T \mathcal{D} \mathbf{B}_{mn}; \\ \mathbf{S}_{mn} &= \frac{a_1 a_2}{4} \mathbf{R}_{mn}^T \mathcal{N}_0 \mathbf{R}_{mn}; \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{X}_{mn} = [w_{mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn}, u_{1mn}, u_{2mn}]^T;$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{n} & \bar{m} \\ \bar{m}^2 & -\bar{m} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 & 0 & -\bar{n} & 0 & 0 \\ -2\bar{m}\bar{n} & \bar{n} & \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\bar{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{m} = \frac{m\pi}{a_1}; \quad \bar{n} = \frac{n\pi}{a_2}.$$

Матрица системы (4.72) имеет следующую структуру:

$$(K_{mn} - \Lambda S_{mn}) = \begin{bmatrix} k_{11} - \Lambda s_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & & k_{44} & k_{45} \\ \text{сим.} & & & & k_{55} \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

где  $s_{11} = \frac{a_1 a_2}{4} (T_1^0 \bar{m}^2 + T_2^0 \bar{n}^2)$  — единственный ненулевой коэффициент матрицы  $S_{mn}$ ;  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 5$ ) — коэффициенты матрицы  $K_{mn}$ . Как следует из анализа структуры матрицы (4.74), ее определитель будет линейно зависеть от параметра нагружения  $\Lambda$ , т. е.

$$\det(K_{mn} - \Lambda S_{mn}) = d_0 - \Lambda d_1, \quad (4.75)$$

где

$$d_0 = \det(K_{mn});$$

$$d_1 = s_{11} \det \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & k_{44} & k_{45} \\ \text{сим.} & & & k_{55} \end{bmatrix}.$$

С использованием (4.75) находят значение параметра нагружения  $\Lambda = \Lambda^{mn}$ , при котором определитель матрицы (4.74) равен нулю

$$\Lambda_{mn} = d_0 / d_1. \quad (4.76)$$

Параметр нагружения, соответствующий критической комбинации нагрузок, определяется минимизацией по всем гармоникам волнообразования

$$\Lambda_{кр} = \min_{(m,n)} \Lambda_{mn}. \quad (4.77)$$

Затем вычисляют

$$T_{1кр} = \Lambda_{кр} T_1^0; \quad T_{2кр} = \Lambda_{кр} T_2^0.$$

Соответствующие  $\Lambda_{кр}$  номера гармоник  $m$  и  $n$  будут определять форму потери устойчивости.

Основная трудоемкость расчета заключается в вычислении определителей пятого и четвертого порядков, необходимость использования ЭВМ здесь очевидна. Приближенные оценки критических нагрузок можно получить, используя метод минимальных жесткостей, т. е. положить

$$D_{kl}^* = D_{kl} - C_{kl}^2 / B_{kl}, \quad (kl = 11, 12, 22, 33) \quad (4.78)$$

и с новыми значениями изгибных жесткостей  $D_{kl}^*$  выполнить расчет, как для пластин с симметричной структурой.

Рассмотрим последовательность решения задачи об определении критических нагрузок свободно опертой прямоугольной многослойной пластины, имеющей симметричное строение многослойного пакета. В этом случае при потере устойчивости деформации срединной поверхности и ее перемещения  $u_1, u_2$  будут равны нулю. Поэтому для формулировки задачи (4.71) достаточно воспользоваться следующими выражениями:

$$X = [\varpi, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathcal{E} = [\kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\mathcal{N} = [M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2]^T;$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & K_{11} & 0 \\ \text{сим.} & & & & K_{22} \end{bmatrix}; \quad L_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 \nabla_1 & \nabla_1 & 0 \\ -\nabla_2 \nabla_2 & 0 & \nabla_2 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Причем для метода минимальных жесткостей вместо  $D_{ij}$  следует положить  $D_{ij}^*$  (4.78).

Разрешающая система однородных линейных алгебраических уравнений будет иметь вид (4.72). Матрицы  $K_{mn}$  и  $S_{mn}$ , формирующие обобщенную задачу на собственные значения, определяются согласно (4.73) при

$$B_{mn} = \begin{bmatrix} \overline{m}^2 & -\overline{m} & 0 \\ \overline{n}^2 & 0 & -\overline{n} \\ -2\overline{m}\overline{n} & \overline{n} & \overline{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_{mn} = \begin{bmatrix} -\overline{m} & 0 & 0 \\ -\overline{n} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы системы уравнений (4.72) будет иметь следующий вид:

$$K_{mn} - \Lambda S_{mn} = \begin{bmatrix} k_{11} - \Lambda s_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

где коэффициенты  $k_{ij}$  определены ранее для (4.24), а  $s_{11}$  для (4.74).

Значение критического параметра нагружения  $\Lambda_{mn}$  будет определяться из условия равенства нулю определителя матрицы (4.79)

$$\Lambda_{mn} = \frac{k_{11}^* k_{22}^* k_{33}^* + 2k_{12}^* k_{23}^* k_{13}^* - k_{13}^{*2} k_{22}^* - k_{23}^{*2} k_{11}^* - k_{12}^{*2} k_{33}^*}{s_{11}^* (k_{22}^* k_{33}^* - k_{23}^{*2})}, \quad (4.80)$$

где

$$s_{11}^* = T_1^0 \bar{m}^2 + T_2^0 \bar{n}^2.$$

Коэффициенты  $k_{ij}^*$  можно представить в виде:

$$k_{11}^* = l_{mn}; \quad k_{12}^* = -\bar{m}(d_{mn} + \bar{n}^2 d_k);$$

$$k_{13}^* = -\bar{n}(d_{nm} + \bar{m}^2 d_k); \quad k_{22}^* = d_{mn} + K_{11};$$

$$k_{23}^* = d_k \bar{m} \bar{n}; \quad k_{33}^* = d_{nm} + K_{22};$$

$$d_{mn} = D_{11} \bar{m}^2 + D_{33} \bar{n}^2; \quad d_{nm} = D_{22} \bar{n}^2 + D_{33} \bar{m}^2;$$

$$d_k = D_{12} + D_{33};$$

$$l_{mn} = d_{mn} \bar{m}^2 + d_{nm} \bar{n}^2 + 2d_k \bar{m}^2 \bar{n}^2.$$

Критический параметр нагружения  $\Lambda_{кр}$  определяется путем минимизации по всем гармоникам волнообразования выражения (4.80). С учетом вышеуказанного представления коэффициентов  $s_{11}^*$  и  $k_{ij}^*$  выражение для  $\Lambda_{кр}$  будет иметь вид:

$$\Lambda_{кр} = \min_{(m,n)} \left\{ \frac{l_{mn} + \left( \frac{\bar{m}^2}{K_{22}^0} + \frac{\bar{n}^2}{K_{11}^0} \right) (d_{mn} d_{nm} - d_k^2 \bar{m}^2 \bar{n}^2)}{(T_1^0 \bar{m}^2 + T_2^0 \bar{n}^2) \left[ 1 + \frac{1}{K_{11} K_{22}} (d_{mn} d_{nm} - d_k^2 \bar{m}^2 \bar{n}^2) + \frac{d_{mn}}{K_{11}} + \frac{d_{nm}}{K_{22}} \right]} \right\}. \quad (4.81)$$

Соответствующие выражению (4.81) значения погонных критических сжимающих нагрузок будут равны  $T_{1кр} = \Lambda_{кр} T_1^0 (1, 2)$ .

### 4.5.3. Устойчивость тонкой свободно опертой пластины

Рассмотрим решение задачи об устойчивости тонкой свободно опертой прямоугольной многослойной пластины несимметричной структуры при двухосном равномерном сжатии. Для тонких пластин, которые не содержат слоев с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью, учет деформаций поперечного сдвига не дает существенных уточнений. Поэтому при расчете можно сразу положить  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . В этом случае в формулировке задачи (4.71) будут участвовать следующие обобщенные перемещения:

$$X = [\omega, u_1, u_2]^T.$$

В качестве компонент вектор-столбца обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  следует принять

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}]^T.$$

Структура матриц  $L_x (\mathcal{E} = L_x X)$  и  $R_x (\omega = R_x X)$  будет следующей:

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 & \nabla_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \\ -\nabla_1 \nabla_1 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 \nabla_2 & 0 & 0 \\ -2\nabla_1 \nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_x = \begin{bmatrix} -\nabla_1 & 0 & 0 \\ -\nabla_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При решении задачи в двойных тригонометрических рядах (4.15) разрешающая система однородных линейных алгебраических уравнений (4.72) будет формироваться согласно (4.73) с помощью следующих исходных матриц  $B_{mn}$  и  $R_{mn}$ :

$$B_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{n} \\ 0 & \bar{n} & \bar{m} \\ \bar{m}^2 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 & 0 & 0 \\ -2\bar{m}\bar{n} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_{mn} = \begin{bmatrix} -\bar{m} & 0 & 0 \\ -\bar{n} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T_1^0 & 0 \\ 0 & T_2^0 \end{bmatrix}.$$

Матрица приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$  соответствует (4.19).

Структура матрицы системы уравнений (4.72) будет аналогична (4.79). Коэффициенты  $k_{ij}$  определяются выражениями

$$k_{11} = \frac{a_1 a_2}{4} (D_{11} \bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^4);$$

$$k_{12} = \frac{-a_1 a_2}{4} (C_{11} \bar{m}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m} \bar{n}^2);$$

$$k_{13} = \frac{-a_1 a_2}{4} (c_{22} \bar{n}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m}^2 \bar{n});$$

$$k_{22} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{11} \bar{m}^2 + B_{33} \bar{n}^2); \quad k_{23} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{12} + B_{33}) \bar{m} \bar{n};$$

$$k_{33} = \frac{a_1 a_2}{4} (B_{22} \bar{n}^2 + B_{33} \bar{m}^2).$$

Критический параметр нагружения  $\Lambda_{кр}$  определяется путем минимизации по всем гармоникам волнообразования выражения

$$\Lambda_{кр} = \min_{(m, n)} \left\{ \frac{k_{11} \left( 1 - \frac{k_{23}^2}{k_{22} k_{33}} \right) - \left( \frac{k_{12}^2}{k_{22}} + \frac{k_{13}^2}{k_{33}} - 2 \frac{k_{12} k_{13} k_{23}}{k_{22} k_{33}} \right)}{\frac{a_1 a_2}{4} (T_1^0 \bar{m}^2 + T_2^0 \bar{n}^2) \left( 1 - \frac{k_{23}^2}{k_{22} k_{33}} \right)} \right\}.$$

Для тонкой пластины симметричной структуры коэффициенты смешанных жесткостей  $C_{ij}$  равны нулю. Это приводит к существенному упрощению решения задачи, поскольку вместо системы трех однородных уравнений можно рассматривать только первое уравнение  $k_{11} - \Delta s_{11} = 0$ . Отсюда получаем  $\Lambda_{mn} = k_{11}/s_{11}$ . В развернутом виде критический параметр нагружения определяется минимизацией выражения

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{(m,n)} \left\{ \frac{D_{11}\bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{33})\bar{m}^2\bar{n}^2 + D_{22}\bar{n}^4}{T_1^0\bar{m}^2 + T_1^0\bar{n}^2} \right\}. \quad (4.82)$$

Выражение (4.82) можно использовать также для оценки критических нагрузок тонких пластин несимметричного строения. При этом вместо изгибных жесткостей  $D_{ki}$  следует воспользоваться жесткостями  $D_{ki}^*$  (4.78).

Для случая одноосного сжатия ( $T_1^0 = 1, T_2^0 = 0$ ) из (4.82) следует, что потеря устойчивости происходит с образованием одной полуволны в направлении оси  $ox_2$ , и значение  $T_{1\text{кр}}$  определяется подбором формы волнообразования вдоль оси  $ox_1$

$$T_{1\text{кр}} = \min_{(m)} \left\{ \frac{\pi^2}{a_1^2} \left[ D_{11} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 m^2 + 2(D_{12} + 2D_{33}) + D_{22} \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right] \right\}.$$

Для пластин, имеющих большое удлинение вдоль оси  $ox_1$  ( $a_1 \gg a_2$ ), число полуволн, возникающих при потере устойчивости, велико. В этом случае минимизацию по  $m$  можно выполнить, считая  $m$  непрерывным аргументом. В результате такой минимизации получим

$$m_{\text{кр}}^2 = (a_1/a_2)^2 \sqrt{D_{22}/D_{11}}$$

$$T_{1\text{кр}} = \frac{2\pi^2}{a_1^2} (\sqrt{D_{11}D_{22}} + D_{12} + 2D_{33}). \quad (4.83)$$

Для удлиненной многослойной пластины, образованной перекрестной укладкой  $[\pm\varphi]$  слоев однонаправленного композита, воспользовавшись нитяной моделью, из (4.83) можно определить следующую зависимость:

$$T_{1\text{кр}} = Eh \frac{\pi_2}{6} \left( \frac{h}{a_2} \right)^2 \sin^2 2\varphi.$$

#### 4.5.4. Подпрограмма вычисления критических сжимающих нагрузок для прямоугольных свободно опертых многослойных пластин

Воспользуемся алгоритмом расчета критических нагрузок, рассмотренным в разделе 4.5.2.

В качестве исходных данных примем:

KSL, CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), E (описание исходных данных для подпрограммы DKSL в примере 2.2); AA(2) — в массиве размещаются значения  $a_1, a_2$  — размеры пластины вдоль осей  $ox_1, ox_2$ ; T0(2) — в массиве

размещаются значения  $T_1^0, T_2^0$  — начальные сжимающие погонные усилия, действующие вдоль осей  $ox_1, ox_2$  (величинам  $T_1^0, T_2^0$  задается лишь соотношение между погонными усилиями); MM, NN — числа просматриваемых гармоник волютообразования вдоль осей  $ox_1$  и  $ox_2$ .

В результате работы подпрограммы PANCN получим:  
TCR(2) — массив, содержащий значения критических погонных усилий  $T_{1кр}, T_{2кр}$ ; MCR, NCR — номера гармоник, соответствующих форме потери устойчивости.

Подпрограмма PANCN использует подпрограмму DKSL (см. пример 2.2) и подпрограммы MUM, MTM, DETMN (см. приложение 2).

Текст подпрограммы PANCN

```
SUBROUTINE PANCN (KSL, CC, H, F, E,
* AA, T0, MM, NN, TCR, MCR, NCR)
DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL),
* AA(2), T0(2), TCR(2), DD(10, 10), D(8,8),
* B(8,5), BD(5,8), STR(5,5), ST4(4,4)
CALL DKSL (0., 0., KSL, CC, H, F, E, DD).
DO 1 I=1,8
DO 1 J=1,8
1 D(I, J)=0.
A4=AA(1)*AA(2)/4.
DO 2 I=1,3
I3=I+3
I4=I+4
DO 2 J=1,3
J3=J+3
J4=J+4
D(I, J)=DD(I, J)*A4
D(I, J3)=DD(I, J4)*A4
D(I3, J)=DD(I4, J)*A4
2 D(I3, J3)=DD(I4, J4)*A4
D(7,7)=DD(9,9)*A4
D(8,8)=DD(10,10)*A4
T1=T0(1)*A4
T2=T0(2)*A4
DO 4 I=1,8
DO 4 J=1,5
4 B(I, J)=0.
B(7,2)=1.
B(8,3)=1.
IK=0
DO 12 M=1, MM
AM=3.1416*M/AA(1)
B(4,1)=AM*AM
B(4,2)=-AM
B(6,3)=AM
B(1,4)=-AM
B(3,5)=AM
DO 12 N=1, NN
AN=3.1416*N/AA(2)
B(5,1)=AN*AN
B(6,1)=-2.*AM*AN
B(6,2)=AN
B(5,3)=-AN
B(3,4)=AN
B(2,5)=-AN
CALL MTM (B, D, BD, 8, 5, 8)
CALL MUM (BD, B, STR, 5, 8, 5)
S11=T1*AM*AM+T2*AN*AN
DO 5 I=1,4
```



```

I1=I+1
DO 5 J=1,4
J1=J+1
5 ST4(I, J)=STR(I1, J1)
CALL DETMN(ST4, 4, D1)
CALL DETMN(STR, 5, D0)
D1=S11*D1
CRMN=D0/D1
IF(IK.NE.0)GOTO13
CR=CRMN
MCR=M
NCR=N
13 IK=1
AMN=ABS(CRMN)
ACR=ABS(CR)
IF(ACR-AMN) 6, 6, 7
7 CR=CRMN
MCR=M
NCR=N
6 CONTINUE
12 CONTINUE
TCR(1)=T0(1)*CR
TCR(2)=T0(2)*CR
RETURN
END

```

#### 4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕГУЛЯРНЫХ ФЕРМЕННЫХ БАЛОК И ПАНЕЛЕЙ

Для оценки напряженно-деформированного состояния крупногабаритных ферменных балок, панелей или платформ (рис. 4.7), построенных из набора регулярных стержневых ячеек, можно воспользоваться приемом энергетического осреднения жесткостных характеристик и выполнить необходимые расчеты с использованием моделей деформирования многослойных балок или панелей [35].

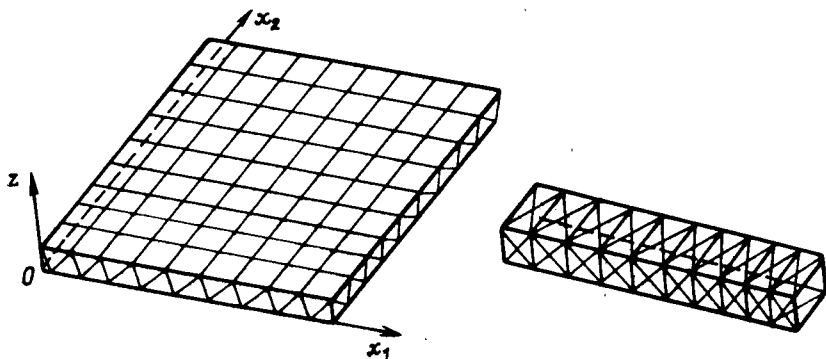


Рис. 4.7. Примеры схем ферменных панелей и балок

Выделим в ферменной конструкции несущие и промежуточные слои. Замкнутые силовые наборы стержневых решеток, параллельных плоскости  $ox_1x_2$ , назовем несущими слоями. Соединительный слой стержневого набора, связывающий несущие слои, будем называть промежуточным.

Будем считать, что несущие слои воспринимают мембранные нагрузки, а промежуточный слой — сдвиговые. Согласно модели деформирования многослойной оболочки для слоя с координатой  $z_{[i]}$ , отсчитываемой от координатной поверхности, мембранные деформации будут равны:

$$\varepsilon_{1[i]} = \varepsilon_1 + z_{[i]} \chi_1, \quad (1,2); \quad (4.84)$$

$$\gamma_{12[i]} = \gamma_{12} + z_{[i]} \chi_{12}.$$

Средние деформации поперечного сдвига в промежуточных слоях определяются как

$$\gamma_{31} = \psi_1, \quad (1,2). \quad (4.85)$$

Воспользовавшись связью деформаций, записанных в исходной и повернутой системах координат (2.60), можно установить, что относительное удлинение стержня в направлении прямой линии  $ox$  на поверхности несущего слоя (рис. 4.8) будет равно

$$\varepsilon_{[i]} = l_1^2 \varepsilon_{1[i]} + l_2^2 \varepsilon_{2[i]} + l_1 l_2 \gamma_{12[i]}, \quad (4.86)$$

где

$$l_1 = \cos(x, x_1) = \cos \alpha_1, \quad (1,2).$$

Будем считать, что такое же удлинение возникнет в стержне, если его ось совпадает с направлением  $ox$ .

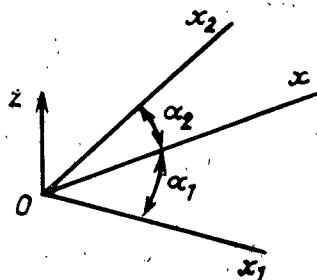


Рис. 4.8. Ориентация стержня в поверхности несущего слоя

Для промежуточного слоя, в котором деформации сдвига считаются основными, относительное удлинение стержня вдоль прямой  $ox$  (рис. 4.9) вычисляется следующим образом

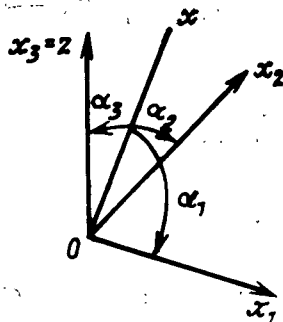


Рис. 4.9. Ориентация стержня в промежуточном слое

$$e_{[i]} = l_3 l_1 \gamma_{31} + l_3 l_2 \gamma_{32}, \quad (4.87)$$

где

$$l_k = \cos(x, x_k) = \cos \alpha_k, \quad (k = 1, 2, 3).$$

По известным координатам конечного и начального узлов стержня направляющие косинусы  $l_k$  определяются как

$$l_k = \frac{x_{k(2)} - x_{k(1)}}{l}, \quad (k = 1, 2, 3);$$

если принять, что  $x_3 = z$ .

Таким образом, на основании соотношений (4.84)–(4.87) для  $i$ -го стержня можно получить связь линейных деформаций стержня с обобщенными деформациями континуальной модели панели (пластина и балка будут частными случаями):

$$e_{[i]} = T_{[i]} \mathcal{E}, \quad (4.88)$$

где

$$\mathcal{E} = [e_1, e_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

для стержня в несущем слое

$$T_{[i]} = [l_1^2, l_2^2, (l_1 l_2), (z_{[i]} l_1^2), (z_{[i]} l_2^2), (z_{[i]} l_1 l_2), 0, 0];$$

для стержня в промежуточном слое

$$T_{[i]} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, (l_3 l_1), (l_3 l_2)].$$

Здесь индекс  $[i]$  для направляющих косинусов  $l_k$  опущен.

Приведенные жесткостные характеристики и температурные составляющие внутренних силовых факторов можно определить, приравняв работы внутренних сил на возможных деформациях дискретной и континуальной моделей. Пусть регулярная ячейка дискретной модели содержит  $N$  стержней и ее проекция на плоскость  $ox_1 x_2$  ограничена контуром, охватываемая площадь которого равна  $S_0$ , тогда

$$\sum_{i=1}^N \delta e_{[i]} ((EA)_{[i]} e_{[i]} - F_{\tau[i]}) l_{[i]} = S_0 \delta \mathcal{E}^T (\mathcal{D} \mathcal{E} - \mathcal{N}_\tau).$$

где  $l_{[i]}$  — длина  $i$ -го стержня.

С учетом (4.88) это равенство работ можно переписать в виде:

$$\delta \mathcal{E}^T \sum_{i=1}^N T_{[i]}^T ((EA)_{[i]} T_{[i]} \mathcal{E} - F_{\tau[i]}) l_{[i]} = S_0 \delta \mathcal{E}^T (\mathcal{D} \mathcal{E} - \mathcal{N}_\tau).$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{D} = \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^N T_{[i]}^T (EA)_{[i]} T_{[i]} l_{[i]}; \quad (4.89)$$

$$\mathcal{N}_\tau = \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^N T_{[i]}^T F_{\tau[i]} l_{[i]}. \quad (4.90)$$

Следует заметить, что при вычислении матрицы  $\mathcal{D}$  (4.89) и вектор-столбца  $\mathcal{N}_\tau$  для тех стержней, которые одновременно формируют  $n$  ячеек (ивлиются общими), жесткости  $(EA)_{[i]}$  и силы  $F_{\tau[i]}$  должны браться уменьшенными в  $n$  раз.

После определения  $\mathcal{D}$  (4.89) и  $\mathcal{N}_T$  (4.90) процедуры расчета континуальной модели выполняются согласно теории многослойных стержней пластин и оболочек. Оценку деформаций в стержнях производят с использованием соотношений (4.88).

Составим подпрограмму определения приведенных жесткостных характеристик континуальной модели ферменной панели.

В качестве исходных данных примем:

NST — число стержневых элементов в ячейке; NUS — число узлов стержневых элементов в ячейке; LIN(2, NST) — массив, содержащий номера начальных и конечных узлов стержневых элементов; XX(3, NUS) — массив, содержащий координаты  $x_1, x_2, z$  узлов стержневых элементов; EA(NST) — массив, содержащий жесткости стержней  $(EA)_{i1}$  (полные жесткости); FT(NST) — массив, содержащий температурные составляющие  $E_{T11}$  (полные) стержней; MM(NST) — массив,  $i$ -й коэффициент которого указывает число ячеек, примыкающих к данному стержню; S0 — эффективная площадь ячейки.

В результате работы подпрограммы CONTI получим:

D(8,8) — массив, содержащий коэффициенты матрицы приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$ ; TN(8) — массив, содержащий коэффициенты температурных составляющих внутренних силовых факторов континуальной модели  $\mathcal{N}_T$ .

Текст подпрограммы CONTI

SUBROUTINE CONTI(NST, NUS, LIN,

\* XX, EA, FT, MM, S0, D, TN).

DIMENSION LIN(2, NST), XX(3, NUS), EA(NST),

\* FT(NST), MM(NST), XL(3), C(3), T(8), D(8,8), TN(8)

DO 7 I=1,8

TN(I)=0.

DO 7 J=1,8

7 D(I, J)=0.

DO 1 I=1, NST

I1=LIN(1, I)

I2=LIN(2, I)

DL=0.

DO 2 J=1,3

XL(J)=XX(J, I2)-XX(J, I1).

2 DL=DL+XL(J)\*\*2

DL=SQRT(DL)

DO 3 J=1,3

3 C(J)=XL(J)/DL

DO 4 J=1,8

4 T(J)=0.

IF(ABS(C(3)).GT.1.0E-4)GO TO 5

Z=(XX(3, I1)+XX(3, I2))\*0.5

T(1)=C(1)\*\*2

T(2)=C(2)\*\*2

T(3)=C(1)\*C(2)

T(4)=T(1)\*Z

T(5)=T(2)\*Z

T(6)=T(3)\*Z

5 T(7)=C(3)\*C(1)

T(8)=C(3)\*C(2)

EAS=EA(I)/MM(I)/S0\*DL

DO 6 J=1,8

TN(J)=TN(J)+T(J)\*FT(I)/S0/MM(I)\*DL

DO 6 K=1,8

6 D(J, K)=D(J, K)+T(J)\*T(K)\*EAS

1 CONTINUE

RETURN

END

## 5. МНОГОСЛОЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ

Особое внимание в главе уделено оболочкам вращения. Среди многослойных конструкций, выполненных из композитных материалов, оболочки вращения занимают особое место, поскольку они весьма технологичны, при изготовлении естественным для волокнистых композитов методом — методом намотки. С точки зрения расчета многослойных конструкций оболочки вращения являются достаточно простыми объектами исследования. Аппроксимации деформаций в трансверсальном направлении и периодичность решений по окружной координате позволяют свести решение трехмерной задачи теории упругости к последовательности решений одномерных краевых задач. В главе показано, как, используя вариационно-матричный способ, для оболочек вращения произвольной геометрии и жесткостной структуры можно получить канонические системы дифференциальных уравнений для решения задач статики, устойчивости и колебаний.

Отдельный раздел посвящен цилиндрическим оболочкам. Расчет цилиндрических оболочек из слоистых композитных материалов обладает рядом особенностей, и далеко не всегда удастся воспользоваться известными решениями, полученными для тонких ортотропных оболочек. Кроме того, даже для простых расчетных схем аналитические решения для оболочек из слоистых композитных материалов, как правило, теряют свои основные преимущества, заключающиеся в простоте расчетных зависимостей и обзорности аналитических выкладок. В этих случаях оказывается удобнее использовать более общий математический аппарат и проводить расчеты на ЭВМ.

### 5.1. СТАТИКА МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

#### 5.1.1. Вариационно-матричный способ получения канонических систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим многослойную оболочку вращения. Координаты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  направим вдоль меридиана и параллели. Материалы слоев пусть будут ортотропными с осями упругой симметрии, совпадающими с направлениями координатных линий. В этом случае при получении разрешающих уравнений можно пользоваться соотношениями, записанными для амплитудных значений  $n$ -й гармоники разложений функции в ряды Фурье по угловой координате  $\alpha_2$ . Ниже приводятся процедуры получения канонических систем разрешающих дифференциальных уравнений для решения задач статики многослойных оболочек вращения общего вида.

На рис. 5.1 показан кольцевой оболочечный элемент, ограниченный нормальными коническими сечениями  $\alpha_1 = \alpha_{(1)}$  и  $\alpha_1 = \alpha_{(2)}$ . Ось  $\alpha_1$  направлена вдоль меридиана, угловая координата  $\alpha_2$  определяет плоскость меридиана, координата  $z$  направлена вдоль внешней нормали; радиус параллели равен параметру Ламе  $A_2$ .

Будем считать, что в пределах кольцевого элемента геометрические параметры, жесткостные характеристики и внешние поверхностные силы изменяются непрерывно. В общем случае

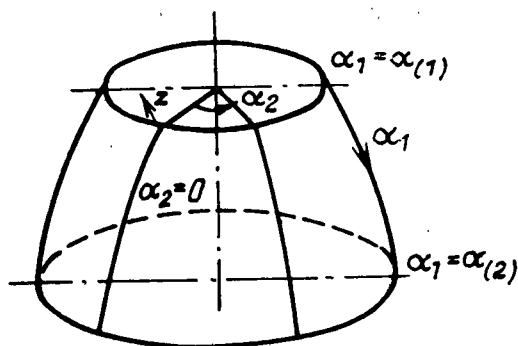


Рис. 5.1. Кольцевой оболочечный элемент

математическая формулировка принципа возможных перемещений для кольцевого оболочечного элемента имеет следующий вид (разд. 2.5.3):

$$\int_{\alpha_{(1)}}^{\alpha_{(2)}} \int_0^{2\pi} (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{N} - \delta \mathbf{X}^T \mathbf{p}) A_1 A_2 d\alpha_2 d\alpha_1 - \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{X}_{[i]}^T \mathbf{t}_{[i]} A_{2(i)} d\alpha_2 = 0, \quad (5.1)$$

где  $\mathcal{E}$  — вектор-столбец обобщенных деформаций;  $\mathcal{N}$  — вектор-столбец внутренних силовых факторов, сопряженных с  $\mathcal{E}$ ;  $\mathbf{X}$  — вектор-столбец обобщенных перемещений;  $\mathbf{p}$  — вектор-столбец распределенных сил, сопряженных с  $\mathbf{X}$ ;  $\mathbf{X}_{(i)} = \mathbf{X}(\alpha_1 = \alpha_{(i)})$ , ( $i = 1, 2$ ) — обобщенные перемещения торцевых сечений;  $\mathbf{t}_{(i)}$ , ( $i = 1, 2$ ) — вектор-столбцы внешних торцевых реакций (считается, что положительные направления  $\mathbf{X}_{(i)}$  и  $\mathbf{t}_{(i)}$  совпадают);  $A_{2(i)} = A_2(\alpha_{(i)})$ . Связь обобщенных внутренних силовых факторов и деформаций устанавливается на основе соотношений упругости

$$\mathcal{N} = \mathcal{D} \mathcal{E}, \quad (5.2)$$

где  $\mathcal{D}$  — симметричная положительно определенная матрица, содержащая приведенные жесткостные характеристики многослойного пакета. Конкретное представление компонент векторов и матриц будет приводиться ниже для конкретных моделей деформирования.

Воспользовавшись периодичностью решений по угловой координате  $\alpha_2$ , кинематические и силовые факторы разложим в тригонометрические ряды и представим в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\beta}_{\Phi n} \bar{\Phi}_n + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_{\Phi n} \tilde{\Phi}_n, \quad (5.3)$$

где  $\Phi = (\mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{t}_{(i)})$ , а матрицы  $\bar{\beta}_{\Phi n}$ ,  $\tilde{\beta}_{\Phi n}$  содержат тригонометрические функции  $\sin n\alpha_2$ ,  $\cos n\alpha_2$ . Коэффициенты

разложений  $\bar{\Phi}_n$  и  $\tilde{\Phi}_n$  соответствуют симметричным и кососимметричным (относительно нулевого меридиана  $\alpha_2=0$ ) составляющим решений и являются функциями координаты  $\alpha_1$ . Специальный выбор знаков при коэффициентах матриц  $\bar{\beta}_{\Phi n}$  и  $\tilde{\beta}_{\Phi n}$  позволяет формировать одинаковые системы разрешающих уравнений как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Поэтому в дальнейшем, если не указывается принадлежность к симметричным или кососимметричным составляющим (т. е., если отсутствуют символы «—» или «~»), то подразумевается, что такая запись справедлива как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Нижним индексом  $n$  будет отмечаться принадлежность к  $n$ -й гармонике разложения.

После подстановки (5.3) в (5.1) и интегрирования по угловой координате  $\alpha_2$  получим следующую одномерную вариационную формулировку:

$$\int_{\alpha_1(1)}^{\alpha_1(2)} (\delta \mathcal{E}_n^T \mathcal{N}_n - \delta X_n^T p_n) A_1 A_2 d\alpha_1 - \sum_{i=1}^2 \delta X_{(i)n}^T t_{(i)n} A_{2(i)} = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\mathcal{N}_n = \mathcal{D} \mathcal{E}_n. \quad (5.5)$$

Для того, чтобы записать связь компонент  $\mathcal{E}_n$  с перемещениями, коэффициентов вектор-столбца  $X_n$  оказывается, как правило, недостаточно, поскольку необходимо располагать также некоторыми производными  $d/d\alpha_1$  от коэффициентов  $X_n$  (например, производными от перемещений или углов поворота). Эти производные удобно сгруппировать в отдельный вектор-столбец  $Y_n$ . После этого можно представить связь  $\mathcal{E}_n$  с перемещениями следующим образом:

$$\mathcal{E}_n = B_{1n} X_n + B_{2n} Y_n. \quad (5.6)$$

Особенностью записи (5.6) является то, что матрицы  $B_{1n}$  и  $B_{2n}$  не содержат дифференциальных операторов  $d/d\alpha_1$ , поскольку все необходимые производные от обобщенных перемещений  $X_n$  присутствуют в вектор-столбце  $Y_n$ . Возможные деформации  $\delta \mathcal{E}_n$  определяются аналогично (5.6), т. е.  $\delta \mathcal{E}_n = B_{1n} \delta X_n + B_{2n} \delta Y_n$ .

Между коэффициентами  $X_n$  и  $Y_n$ , а также  $\delta X_n$ ,  $\delta Y_n$  по определению существует дифференциальная связь, которую в общем виде можно представить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} X_n - C_1 X_n - C_2 Y_n &= 0; \\ \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \delta X_n - C_1 \delta X_n - C_2 \delta Y_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Для того, чтобы в формулировке задачи (5.4) коэффициенты  $X_n$ ,  $Y_n$  считать независимыми, нужно дополнительные усло-

вия связи (5.7) ввести в (5.4) с помощью множителей Лагранжа. В результате этих процедур с учетом (5.5), (5.6) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_{(1)}}^{\alpha_{(2)}} ((B_{1n}\delta X_n + B_{2n}\delta Y_n)^T \mathcal{D}(B_{1n}X_n + B_{2n}Y_n) - \delta X_n^T p_n) A_2 A_1 d\alpha_1 + \\ & + \int_{\alpha_{(1)}}^{\alpha_{(2)}} \left( \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \delta X_n - C_1 \delta X_n - C_2 \delta Y_n \right)^T \lambda_n + \\ & + \delta \lambda_n^T \left( \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} X_n - C_1 X_n - C_2 Y_n \right) A_1 d\alpha_1 - \\ & - \sum_{i=1}^2 \delta X_{(i)n}^T t_{(i)n} A_{2(i)} = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $\lambda_n$  и  $\delta \lambda_n$  — множители Лагранжа. Вариационная формулировка (5.8) позволяет получить искомую каноническую систему дифференциальных уравнений (см. раздел 1.3)

$$\frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

где матричные блоки системы определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{11} &= C_1 - bS_{21}; & A_{12} &= bC_2^T; \\ A_{21} &= S_{11} - dS_{21}; & A_{22} &= -A_{11}^T; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} b &= C_2 S_{22}^{-1}; & d &= S_{21}^T S_{22}^{-1}; \\ S_{ij} &= A_2 B_{in}^T \mathcal{D} B_{jn}, & (i, j &= 1, 2); \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$H_1 = 0; \quad H_2 = -A_2 p_n, \quad (5.12)$$

также выразить компоненты вектор-столбца  $Y_n$

$$Y_n = S_{22}^{-1} (C_2^T \lambda_n - S_{21} X_n) \quad (5.13)$$

и записать граничные условия при

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{(1)} & \lambda_{(1)n} &= -t_{(1)n} A_{2(1)}; \\ \alpha_2 &= \alpha_{(2)} & \lambda_{(2)n} &= t_{(2)n} A_{2(2)}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $\lambda_{(i)n} = \lambda_n(\alpha_{(i)})$  ( $i=1, 2$ ). Кинематические граничные условия могут задаваться на компоненты векторов  $X_{(i)n}$ . Как следует из записи силовых граничных условий (5.14), множители Лагранжа  $\lambda_n$  представляют внутренние силовые факторы, умноженные на радиус параллели.



Полученная вариационно-матричным способом система дифференциальных уравнений (5.9) в качестве неизвестных функций аргумента  $\alpha_1$  содержит компоненты вектор-столбцов обобщенных перемещений  $X_n$  и обобщенных силовых факторов  $\lambda_n$ . Соотношения (5.10) — (5.12) определяют алгоритм получения коэффициентов канонической системы. В качестве исходной информации выступают матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$  (5.6), определяющие кинематику деформирования; матрица  $\mathcal{D}$  (5.5), характеризующая приведенные жесткости многослойного пакета; матрицы  $C_1$ ,  $C_2$  (5.7), устанавливающие связи между  $X_n$  и  $Y_n$ ; вектор-столбец  $p_n$  (5.12), определяющий коэффициенты разложения в ряды Фурье внешних распределенных сил и моментов. Конкретное содержание исходной информации приводится в последующих разделах.

После решения краевой задачи и определения в сечениях вывода результатов  $X_n$  и  $\lambda_n$  определяется вектор-столбец  $Y_n = b^T \lambda_n - d^T X_n$  (5.10), (5.13). После этого с использованием (5.6) восстанавливаются значения обобщенных деформаций  $\mathcal{E}_n$  и осуществляется пересчет результатов для точек вывода (5.3). В точках вывода производится суммирование решений по отдельным гармоникам.

Рассмотрим особенности получения разрешающих уравнений для случая совместного силового нагружения и нагрева. Исходная вариационная формулировка остается прежней (5.4). Изменяется запись связи обобщенных силовых факторов с деформациями  $\mathcal{N} = \mathcal{D}\mathcal{E} - \mathcal{N}_T$ , где  $\mathcal{N}_T$  — вектор-столбец температурных составляющих внутренних силовых факторов (2.126). Для  $n$ -й гармоники разложения запишем

$$\mathcal{N}_n = \mathcal{D}\mathcal{E}_n - \mathcal{N}_{Tn}. \quad (5.15)$$

Такое представление внутренних силовых факторов приведет к изменению вектор-столбца свободных членов в системе дифференциальных уравнений (5.9). Вместо (5.12) получим

$$H_1 = bN_2; \quad H_2 = -N_1 + dN_2, \quad (5.16)$$

где

$$N_1 = A_2(p_n + B_{1n}^T \mathcal{N}_{Tn}); \quad N_2 = A_2 B_{2n}^T \mathcal{N}_{Tn}.$$

Кроме того, вместо выражения (5.13) для  $Y_n$  следует воспользоваться зависимостью

$$Y_n = S_{22}^{-1}(N_2 + C_2^T \lambda_n - S_{21} X_n), \quad (5.17)$$

или

$$Y_n = b^T \lambda_n - d^T X_n + S_{22}^{-1} N_2.$$

Значения обобщенных деформаций вычисляются согласно (5.6), для определения внутренних силовых факторов необходимо использовать выражение (5.15).

### 5.1.2. Подпрограмма получения канонической системы дифференциальных уравнений

Разрешающую систему дифференциальных уравнений (5.9) представим в виде

$$\frac{d}{d\alpha_1} Z = AZ + H, \quad (5.18)$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}; \quad A = A_1 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad H = A_1 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}.$$

Составим подпрограмму вычисления матрицы канонической системы  $A$  и вектора свободных членов  $H$ .

В качестве исходных данных примем:

$NX, NY$  — целые числа, определяющие размерности вектор-столбцов  $X_n$  и  $Y_n$ ;  $NE$  — размерность вектор-столбца обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$ ;  $N$  — число уравнений, формирующих разрешающую систему дифференциальных уравнений ( $N=2NX$ );  $B1(NE, NX)$  — массив коэффициентов, соответствующий матрице  $B_{1n}$  (5.6);  $B2(NE, NY)$  — массив коэффициентов, соответствующий матрице  $B_{2n}$  (5.6);  $DD(NE, NE)$  — массив, содержащий коэффициенты матрицы приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  (5.2);  $C1(NX, NX), C2(NX, NY)$  — массивы, соответствующие матрицам связи  $C_1, C_2$  (5.7);  $P(NX), TN(NE)$  — массивы, соответствующие вектор-столбцам распределенных сил  $p_n$  (сопряженных с  $X_n$ ) и температурных составляющих внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}_{Tn}$ ;  $A1, A2$  — параметры Ламе  $A_1, A_2$ .

В результате работы подпрограммы STAH получим:

$A(N, N)$  — массив, содержащий коэффициенты матрицы  $A$ , разрешающей системы дифференциальных уравнений (5.18);  $H(N)$  — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца свободных членов  $H$  (5.18).

Рабочие массивы:  $B(NX, NY), D(NX, NX), S(NY, NY), S11(NX, NX), S22(NY, NY), S21(NY, NX), Q1(NX), Q2(NY), BD(NX, NE)$ .

В массивах  $B(NX, NY), D(NX, NY), S(NY, NY), Q1(NX), Q2(NY)$  после работы подпрограммы находятся вспомогательные матрицы  $b, d, S_{22}^{-1}$  (5.10) и вектор-столбцы  $N_1, N_2$  (5.16). Массив  $C1$  после работы подпрограммы не сохраняется.

При работе подпрограммы STAH используются подпрограммы MUM, MTM, MMT, MATIN, SKM (Приложение 2).

Текст подпрограммы STAH

```
SUBROUTINE STAH(NX, NY, NE, N, B1, B2, DD, C1, C2,
* P, TN, A1, A2, A, H, B, D, S, S11, S22, S21, Q1, Q2, BD)
  DIMENSION B1(NE, NX), B2(NE, NY), DD(NE, NE),
* C1(NX, NX), C2(NX, NY), P(NX), TN(NE), A(N, N),
* H(N), B(NX, NY), D(NX, NY), S(NY, NY), S11(NX, NX),
* S22(NY, NY), S21(NY, NX), Q1(NX), Q2(NY), BD(NX, NE)
  CALL MTM(B1, TN, Q1, NE, NX, 1)
  CALL MTM(B2, TN, Q2, NE, NY, 1)
  CALL SKM(Q2, A2, NY, 1)
  CALL SKM(DD, A2, NE, NE)
  CALL MTM(B1, DD, BD, NE, NX, NE)
  CALL MUM(BD, B1, S11, NX, NE, NX)
  CALL MTM(B2, DD, BD, NE, NY, NE)
  CALL MUM(BD, B2, S22, NY, NE, NY)
  CALL MUM(BD, B1, S21, N4, NE, NX)
  DO 1 I=1, NX
    IN=I+NX
    Q1(I)=A2*(P(I)+Q1(I))
  DO 1 J=1, NX
```

```

A(I, J)=C1(I, J)
1 A(IN, J)=S11(I, J)
  CALL MATIN(S22, S, NY)
  CALL MUM(C2, S, B, NX, NY, NY)
  CALL MTM(S21, S, D, NY, NX, NY)
  CALL MMT(B, C2, C1, NX, NY, NX)
  CALL MUM(B, S21, S11, NX, NY, NX)
  DO 2 J=1, NX
    JN=J+NX
  DO 2 I=1, NX
    IN=I+NX
    A(I, J)=A(I, J)-S11(I, J)
    A(JN, IN)=-A(I, J)
2 A(I, JN)=C1(I, J)
  CALL MUM(D, S21, C1, NX, NY, NX)
  DO 3 I=1, NX
    IN=I+NX
  DO 3 J=1, NX
3 A(IN, J)=A(IN, J)-C1(I, J)
  CALL SKM(A, A1, N, N)
  CALL MUM(B, Q2, H, NX, NY, 1)
  I=NX+1
  CALL MUM(D, Q2, H(I), NX, NY, 1)
  DO 4 I=1, NX
    IN=I+NX
4 H(IN)=H(IN)-Q1(I)
  CALL SKM(H, A1, N, 1)
  A3=1./A2
  CALL SKM(DD, A3, NE, NE)
  RETURN
  END

```

### 5.1.3. Тонкие многослойные оболочки

Исходные данные для получения разрешающей системы дифференциальных уравнений (5.9) имеют следующий вид.

Обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  и матрицы разложения  $\mathcal{E}$  в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}]^T; \\
 \bar{\beta}_{en} &= [c_n, c_n, s_n, c_n, c_n, s_n]; \\
 \tilde{\beta}_{en} &= [s_n, s_n, -c_n, s_n, s_n, -c_n],
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

где  $s_n = \sin n\alpha_2$ ;  $c_n = \cos n\alpha_2$ ; угловыми скобками обозначаются диагональные матрицы.

Внутренние силовые факторы  $\mathcal{N}$  и матрицы разложения  $\mathcal{N}$  в тригонометрические ряды:

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}]^T;$$

$$\bar{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{en}; \quad \tilde{\beta}_{Nn} = \tilde{\beta}_{en}.$$

Обобщенные перемещения  $X$  и матрицы разложения  $X$  в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [u_1, u_2, w, \omega_1]^T; \\ \bar{\beta}_{xn} &= [c_n, s_n, c_n, c_n]; \\ \tilde{\beta}_{xn} &= [s_n, -c_n, s_n, s_n]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Компоненты вектор-столбца  $\mathbf{Y}$  и матрицы разложения  $\mathbf{Y}$  в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [u_1, u_2, \omega_1]^T; \\ \bar{\beta}_{yn} &= [c_n, s_n, c_n]; \\ \tilde{\beta}_{yn} &= [s_n, -c_n, s_n]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Компоненты вектор-столбца внешних распределенных сил  $\mathbf{p}$  и матрицы разложения  $\mathbf{p}$  в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [p_1, p_2, p_3, 0]^T \\ \bar{\beta}_{pn} &= \bar{\beta}_{xn}; \quad \tilde{\beta}_{pn} = \tilde{\beta}_{pn}, \end{aligned}$$

где  $p_1, p_2$  — распределенные касательные поверхностные силы, действующие вдоль  $\alpha_1$ - и  $\alpha_2$ -линий;  $p_3$  — нормальное давление (положительное направление действия давления  $p_3$  соответствует положительному направлению оси  $oz$ ).

Обобщенные силовые факторы  $\lambda$ , сопряженные с перемещениями  $\mathbf{X}$  (5.19), будут представлены следующими компонентами:

$$\begin{aligned} \lambda &= A_2 [N_1, N_{12}^*, Q_1^*, M_1]^T; \\ \bar{\beta}_{\lambda n} &= \bar{\beta}_{xn}; \quad \tilde{\beta}_{\lambda n} = \tilde{\beta}_{xn}, \end{aligned}$$

где

$$N_{12}^* = N_{12} + k_2 M_{12}; \quad Q_1^* = Q_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} M_{12}.$$

Матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  имеет структуру (4.19).

Для амплитудных значений  $n$ -х гармоник разложения деформационные соотношения устанавливаются на основе соотношений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{1n} + k_1 w_n; \\ \varepsilon_{2n} &= \varphi_{21} u_{1n} + \bar{n} u_{2n} + k_2 w_n; \\ \gamma_{12n} &= -\bar{n} u_{1n} - \varphi_{21} u_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{2n}; \\ \kappa_{1n} &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \omega_{1n}; \\ \kappa_{2n} &= k_2 \bar{n} u_{2n} + \bar{n}^2 w_n + \varphi_{21} \omega_{1n}; \\ \chi_{12} &= 2 \left( -\varphi_{21} k_2 u_{2n} - \varphi_{21} \bar{n} w_{1n} - \bar{n} \omega_{1n} + k_2 \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{2n} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

где

$$\bar{n} = n/A_2; \quad \varphi_{21} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{d A_2}{d \alpha_1}.$$

Согласно (5.22) для выбранных последовательностей компонент вектор-столбцов  $\mathcal{E}$  (5.19),  $X$  (5.20) и  $Y$  (5.21) матрицы деформационных соотношений  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$  (5.6) будут иметь следующие коэффициенты:

$$B_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 \\ \varphi_{21} & \bar{n} & k_2 & 0 \\ -\bar{n} & -\varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 \bar{n} & \bar{n}^2 & \varphi_{21} \\ 0 & -2\varphi_{21} k_2 & -2\varphi_{21} \bar{n} & -2\bar{n} \end{bmatrix}; \quad B_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы связи  $C_1$  и  $C_2$  (5.7) в этом случае:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектор-столбца температурных составляющих внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}_T$  упорядочены следующим образом:

$$\mathcal{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, 0, M_{1T}, M_{2T}, 0]^T.$$

Матрицы разложения  $\mathcal{N}_T$  в тригонометрические ряды совпадают с матрицами  $\bar{\beta}_{en}$ ,  $\tilde{\beta}_{en}$  (5.19).

#### 5.1.4. Учет деформаций поперечных сдвигов

Компоненты обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  и матриц  $\bar{\beta}_{en}$ ,  $\tilde{\beta}_{en}$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\bar{\beta}_{en} = [c_n, c_n, s_n, c_n, c_n, s_n, c_n, s_n]; \quad (5.23)$$

$$\tilde{\beta}_{en} = [s_n, s_n, -c_n, s_n, s_n, -c_n, s_n, -c_n].$$

Внутренние силовые факторы

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2]^T;$$

$$\bar{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{en}; \quad \tilde{\beta}_{Nn} = \tilde{\beta}_{en}.$$

Обобщенные перемещения  $X$  и матрицы  $\bar{\beta}_{xn}$ ,  $\tilde{\beta}_{xn}$  записываются как

$$X = [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T;$$

$$\bar{\beta}_{xn} = [c_n, s_n, c_n, c_n, s_n]; \quad (5.24)$$

$$\tilde{\beta}_{xn} = [s_n, -c_n, s_n, s_n, -c_n].$$

Компоненты вектор-столбца  $Y$  соответственно

$$Y = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T. \quad (5.25)$$

Матрицы разложения  $Y$  в тригонометрические ряды  $\bar{\beta}_{yn} = \bar{\beta}_{xn}$ ,  $\bar{\beta}_{yn} = \bar{\beta}_{xn}$ .

Компоненты вектор-столбца внешних распределенных сил  $p$  с учетом пояснений к выражению (2.118):

$$p = [p_1, p_2, p_3, m_1, m_2]^T \quad (5.26)$$

Матрицы разложения  $p$  в тригонометрические ряды  $\bar{\beta}_{pn} = \bar{\beta}_{xn}$ ,  $\bar{\beta}_{pn} = \bar{\beta}_{xn}$ .

Обобщенные силовые факторы  $\lambda$ , сопряженные с перемещениями  $X$  (5.24), имеют следующие компоненты:

$$\lambda = A_2 [N_1, N_{12}, Q, M_1, M_{12}]^T. \quad (5.27)$$

Матрицы разложения  $\lambda$  в тригонометрические ряды  $\bar{\beta}_{\lambda n} = \bar{\beta}_{xn}$ ,  $\bar{\beta}_{\lambda n} = \bar{\beta}_{xn}$ . Матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  имеет структуру (4.6).

Коэффициенты обобщенных деформаций  $\mathcal{E}_n$  выражаются через перемещения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1n} &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{1n} + k_1 w_n; \\ \varepsilon_{2n} &= \varphi_{21} u_{1n} + \bar{n} u_{2n} + k_2 w_n; \\ \gamma_{12n} &= -\bar{n} u_{1n} - \varphi_{21} u_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{2n}; \\ \kappa_{1n} &= \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \theta_{1n}; \\ \kappa_{2n} &= \varphi_{21} \theta_{1n} + \bar{n} \theta_{2n}; \\ \chi_{12n} &= -\bar{n} \theta_{1n} - \varphi_{21} \theta_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \theta_{2n}; \\ \psi_{1n} &= \theta_{1n} + \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} w_n - k_1 u_{1n}; \\ \psi_{2n} &= \theta_{2n} - \bar{n} w_n - k_2 u_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

На основе соотношений (5.28) заполняются матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$  с учетом (5.6):

$$B_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \bar{n} & k_2 & 0 & 0 \\ -\bar{n} & -\varphi_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{21} & \bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{n} & -\varphi_{21} \\ -k_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -\bar{n} & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы связи  $C_1$  и  $C_2$  с учетом (5.7):

$$C_1 = O_{(5 \times 5)}; \quad C_2 = E_{(5 \times 5)}, \quad (5.29)$$

где  $O_{(5 \times 5)}$  и  $E_{(5 \times 5)}$  — нулевая и единичная матрицы размерности  $(5 \times 5)$ .

Компоненты вектор-столбца температурных составляющих внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}_T$  упорядочены следующим образом:

$$\mathcal{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, 0, M_{1T}, M_{2T}, 0, 0, 0]^T. \quad (5.30)$$

Матрицы разложения  $N_T$  в тригонометрические ряды совпадают с матрицами  $\bar{\beta}_{en}$  и  $\tilde{\beta}_{en}$ .

### 5.1.5. Учет деформаций поперечных сдвигов и изменения метрических характеристик

Обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  и матрицы  $\bar{\beta}_{en}$ ,  $\tilde{\beta}_{en}$  имеют вид:

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \psi_1, \psi_2]^T;$$

$$\bar{\beta}_{en} = [c_n, c_n, s_n, s_n, c_n, c_n, s_n, s_n, c_n, s_n];$$

$$\tilde{\beta}_{en} [s_n, s_n, -c_n, -c_n, s_n, s_n, -c_n, -c_n, s_n, -c_n].$$

Внутренние силовые факторы  $N$  соответственно:

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}, Q_1, Q_2]^T;$$

$$\bar{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{en}; \quad \tilde{\beta}_{Nn} = \tilde{\beta}_{en}.$$

Коэффициенты матрицы приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  определяются с учетом изменения метрических свойств (2.149) (пример 2.2 и подпрограмма DKSL).

Для  $n$ -й гармоники разложения коэффициенты вектор-столбца обобщенных деформаций  $\mathcal{E}_n$  выражаются через перемещения следующим образом:

$$\varepsilon_{1n} = \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{1n} + k_1 w_n;$$

$$\varepsilon_{2n} = \varphi_{21} u_{1n} + \bar{n} u_{2n} + k_2 w_n;$$

$$\varepsilon_{12n} = \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} u_{2n};$$

$$\varepsilon_{21n} = -\bar{n} u_{1n} - \varphi_{21} u_{2n};$$

$$\kappa_{1n} = \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \theta_{1n};$$

$$\kappa_{2n} = \varphi_{21} \theta_{1n} + \bar{n} \theta_{2n};$$

$$\kappa_{12n} = \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \theta_{2n};$$

$$\kappa_{21n} = -\bar{n} \theta_{1n} - \varphi_{21} \theta_{2n};$$

$$\psi_{1n} = \theta_{1n} + \frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} w_n - k_1 u_{1n}; \quad \psi_{2n} = \theta_{2n} - \bar{n} w_n - k_2 u_{2n}.$$

(5.31)

На основе соотношений (5.31) заполняются матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$  с учетом (5.6)

$$B_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \bar{n} & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{n} & -\varphi_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{21} & \bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{n} & -\varphi_{21} \\ -k_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -\bar{n} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Представление компонент вектор-столбцов  $X$ ,  $Y$ ,  $p$ ,  $\lambda$  дается выражениями (5.24)—(5.27). Матрицы связи  $C_1$ ,  $C_2$  и вектор-столбец  $\mathcal{M}_T$  определяются согласно (5.29), (5.30).

### 5.1.6. Подпрограмма вычисления матриц жесткости кольцевых оболочечных элементов

Подпрограмма использует вариационно-матричный способ получения канонической системы разрешающих уравнений, численное интегрирование методом Рунге—Кутты для формирования матрицы фундаментальных решений (МФР) на кольцевом оболочечном элементе и получение на основе МФР матрицы жесткости конечного элемента оболочки вращения.

Формальные параметры головной подпрограммы SHEST: NSH — суммарное число оболочек в конструкции; ISH — номер рассматриваемой оболочки в конструкции; NEL — число конечных элементов в рассматриваемой оболочке; IEL — номер конечного элемента в рассматриваемой оболочке ( $1 \leq IEL \leq NEL$ ); IT — признак типа оболочки (IT=1 — конус; IT=2 — эллиптический тор); GEM(5, NSH) — массив геометрических характеристик оболочек (см. описание исходных данных для подпрограммы GEOM, пример 2.1); KSL, CC, H, E, F, TE, TS, BL, AL — даны в описании исходных данных для подпрограмм DKSL=TERMN (примеры 2.2, 2.3); NG — номер гармоник и разложения решений в ряды Фурье по угловой координате  $\alpha_2$  (соответствует  $n$ ); KIN — число шагов интегрирования канонической системы на конечном элементе; NX, NY, NE, N — целые числа, указывающие размерности вектор-столбцов  $X$ ,  $Y$ ,  $E$ ,  $Z$ ; ( $N=2 \times NX$ ); P(NX) — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца распределенных сил  $p_n$  (сопряженных с  $X_n$ ).

В результате работы подпрограммы SHEST получим: SE(N,N) — массив, содержащий коэффициенты матрицы жесткости кольцевого конечного элемента оболочки вращения, соответствующий  $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$  в выражении (1.111); PE(N) — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца приведенных узловых сил, соответствующий  $P = [P_{(1)}^T, P_{(2)}^T]^T$  в выражении (1.111); VB(NE, N); EE(NE) — массивы, содержащие коэффициенты матрицы  $B$  и вектор-столбца  $E$ , с помощью которых после решения задачи можно вычислить значения коэффициентов вектор-столбцов обобщенных деформаций в конечном сечении элемента ( $\mathcal{E} = Bq + E$ , где  $q = [X_{(1)}^T, X_{(2)}^T]^T$  — вектор-столбец узловых обобщенных перемещений конечного элемента;  $B =$



$= [B_{11}, B_{12}]; B_{11} = B_2 b^T K_{21}; B_{12} = B_2 b^T K_{22} - B_2 d^T + B_1; E = B_2 (S_{22}^{-1} N_2 - b^T P_{(2)})$ .  
Здесь использовались зависимости (5.6), (5.14), (5.17), а также представленные  $\lambda_{(2)} = K_{21} X_{(1)} + K_{22} X_{(2)} - P_{(2)}$  (индекс  $n$  опущен).

Для работы подпрограммы SHEST используются следующие подпрограммы: GEOM, DKSL, TERMN (примеры 2.1, 2.2, 2.3); STAH (разд. 5.1.2); MFR, STF (Приложение 4), а также четыре специальные подпрограммы DMODL, TLOAD, DEFOR, RELAT — которые формируют исходные данные для выбранной модели деформирования оболочки. В текстах, приведенных ниже, эти специальные подпрограммы написаны для оболочки, модель деформирования которой учитывает деформации поперечных сдвигов и изменение метрических характеристик по толщине многослойного пакета (раздел 5.1.5). В случае использования других моделей эти подпрограммы необходимо заменить.

В подпрограмме DMODL вычисляется матрица приведенных жесткостей  $\mathcal{D}$  (идентификатор DM) многослойного пакета, соответствующая выбранной модели деформирования.

В подпрограмме TLOAD формируется вектор-столбец температурных составляющих погонных силовых факторов  $\mathcal{N}_{Tn}$  (идентификатор TTN).

Подпрограмма DEFOR заполняет массивы, соответствующие матрицам  $B_{1n}, B_{2n}$  (идентификаторы B1, B2), которые связывают обобщенные деформации  $\mathcal{E}$  с вектор-столбцами  $X_n$  и  $Y_n$  (5.6).

В подпрограмме RELAT заполняются матрицы связи  $C_1, C_2$ , где идентификаторы C1, C2 — из уравнения (5.7).

Тексты подпрограмм

```
SUBROUTINE SHEST (NSH, ISH, NEL, IEL, IT,
* GEM, KSL, CC, H, F, E, TE, TS, BL, AL, NG, KIN,
* NX, NY, NE, N, P, SE, PE, BB, EE)
  DIMENSION GEM(5, NSH), CC(7, KSL), H(KSL)
* F(KSL), BL(KSL), AL(2, KSL), P(NX), SE(N, N), PE(N),
* TN(4), TM(4), B1(50), B2(50), DD(100), DM(100),
* TTN(10), C1(25), C2(25), AA(300), HH(30),
* B(25), D(25), S(25), S11(25), S22(25), S21(25),
* Q1(5), Q2(5), BD(50), X(3), Y(110), Y1(110),
* Y2(110), Y3(110), Y4(110), Z(110), AX(100),
* HX(10), R1(25), R2(25), BB(NE, N), EE(NE)
  DL = (GEM(2, ISH) - GEM(1, ISH)) / NEL
  X(3) = DL * IEL + GEM(1, ISH)
  X(1) = X(3) - DL
  X(2) = 0.5 * (X(1) + X(3))
  XX = X(2)
  CALL GEOM (NSH, ISH, IT, XX,
* GEM, A1, A2, RK1, RK2, F21, TET)
  CALL DKSL (RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, DD)
  CALL TERMN (RK1, RK2, KSL, CC,
* H, F, E, TE, TS, BL, AL, TN, TM)
  CALL DMODL (DD, NE, DM)
  CALL TLOAD (TN, TM, NE, TTN)
  DO 1 I=1,3
    XX=X(I)
    CALL GEOM (NSH, ISH, IT, XX,
* GEM, A1, A2, RK1, RK2, F21, TET)
    CALL DEFOR (NX, NY, NE, RK1, RK2,
* F21, A2, NG, B1, B2)
    CALL RELAT (NX, NY, RK1, C1, C2)
    IA=N*N*(I-1)+1
    IH=N*(I-1)+1
    CALL STAH (NX, NY, NE, N, B1, B2, DM, C1, C2, P, TTN,
* A1, A2, AA (IA), HH (IH), B, D, S, S11, S22, S21, Q1, Q2, BD)
  1 CONTINUE
  CALL MFR (X(1), X(3), AA, HH, N,
```

```

* Y1, Y2, Y3, Y4, Z, AX, HX, KIN, Y)
  N1=N+1
  CALL STF(Y, N, NX, N1, R1, R2, SE, PE)
  DO 2 I=1, NX
    M=NX+1
    IJ=1-NX
    DO 2 J=1, NX
      K=NX+J
      IJ=IJ+NX
      S21(IJ)=SE(M, J)
2 S22(IJ)=SE(M, K)
  CALL MMT(B2, B, Z, NE, NY, NX)
  CALL MUM(Z, S21, BB, NE, NX, NX)
  CALL MUM(Z, S22, Y1, NE, NX, NX)
  CALL MMT(B2, D, Y2, NE, NY, NX)
  M=NE*NX
  DO 3 I=1, M
    K=M+I
    I2=K/NE+1
    I1=K-NE*(I2-1)
3 BB(I1, I2)=Y1(I)-Y2(I)+B1(I)
  CALL MUM(S, Q2, Y1, NY, NY, 1)
  N1=NX+1
  CALL MTM(B, PE(N1), Y2, NX, NY, 1)
  DO 4 I=1, NY
4 Y1(I)=Y1(I)-Y2(I)
  CALL MUM(B2, Y1, EE, NE, NY, 1)
  RETURN
END
SUBROUTINE RELAT (NX, NY, RK1, C1, C2)
  DIMENSION C1(NX, NX), C2(NX, NY)
  DO 1 I=1, NX
    DO 2 J=1, NX
2 C1(I, J)=0.
  DO 1 J=1, NY
1 C2(I, J)=0.
  DO 3 I=1, NX
3 C2(I, 1)=1.
  RETURN
END
SUBROUTINE DEFOR (NX, NY, NE,
* RK1, RK2, F21, A2, NG, B1, B2)
  DIMENSION B1(NE, NX), B2(NE, NY)
  DO 1 I=1, NE
    DO 2 J=1, NX
2 B1(I, J)=0.
  DO 3 J=1, NY
3 B2(I, J)=0.
1 CONTINUE
  AN=NG/A2
  B1(1, 3)=RK1
  B1(2, 1)=F21
  B1(2, 2)=AN
  B1(2, 3)=RK2
  B1(4, 1)=-AN
  B1(4, 2)=-F21
  B1(6, 4)=F21
  B1(6, 5)=AN
  B1(8, 4)=-AN
  B1(8, 5)=-F21

```

```

• B1(9, 1) = -RK1
  B1(9, 4) = 1.
  B1(10, 2) = -RK2
  B1(10, 3) = -AN
  B1(10, 5) = 1.
  B2(1, 1) = 1.
  B2(3, 2) = 1.
  B2(5, 4) = 1.
  B2(7, 5) = 1.
  B2(9, 3) = 1.
  RETURN
END
SUBROUTINE TLOAD(TN, TM, NE, TTN)
  DIMENSION TN(4), TM(4), TTN(NE)
  DO 1 I = 1, 4
    TTN(I) = TN(I)
1  TTN(I+4) = TM(I)
  TTN(9) = 0.
  TTN(10) = 0.
  RETURN
END
SUBROUTINE DMODL(DD, NE, DM)
  DIMENSION DD(10, 10), DM(NE, NE)
  DO 1 I = 1, NE
    DO 1 J = 1, NE
1  DM(I, J) = DD(I, J)
  RETURN
END

```

## 5.2. Устойчивость и колебания многослойных оболочек вращения

При получении разрешающих уравнений будем считать, что в исходном невозмущенном состоянии оболочка напряжена, но не деформирована. Исходное напряженное состояние определяется решением задачи статики в линейной постановке. При составлении уравнений движения в окрестности исходного состояния будем учитывать начальное напряженное состояние. В деформационных соотношениях кроме линейных составляющих будем учитывать нелинейные слагаемые, связанные с дополнительными углами поворота нормалей. При решении задач рассмотрим только осесимметричное начальное напряженное состояние. Будем считать, что действующие на конструкцию внешние нагрузки при движении системы не изменяются ни по величине, ни по направлению. В целом систему, включая внешние нагрузки, поведение материала и условия связи, будем считать консервативной.

### 5.2.1. Получение канонических систем дифференциальных уравнений

Для исследования гармонического движения системы относительно начального напряженного состояния воспользуемся линейаризованной вариационной формулировкой (2.146), дополненной работой сил инерции,

$$\int_{\alpha_{(1)}^0}^{\alpha_{(2)}^{2\pi}} \int_0^{2\pi} (\delta \mathcal{E}^T \mathcal{N} - \Lambda \delta \omega^T \mathcal{N}_0 \omega - \omega^2 \delta \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{u}) A_1 A_2 d\alpha_2 d\alpha_1 - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{X}_{(i)}^T \mathbf{t}_{(i)} A_{2(i)} d\alpha_2 = 0, \quad (5.32)$$

где  $\Lambda$  — параметр нагружения;  $\omega$  — круговая частота гармонических колебаний;

$$\mathcal{N}_0 = - \begin{bmatrix} N_0^1 & 0 \\ 0 & N_2^0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

— определяет матрицу начальных погонных усилий, коэффициенты которой определяются решением задачи статики при  $\Lambda=1$  (нагружение считается пропорциональным);

$$\omega = [\omega_1, \omega_2]^T$$

— вектор-столбец углов поворота нормали;

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} B_\rho & 0 & 0 & C_\rho & 0 \\ & B_\rho & 0 & 0 & C_\rho \\ & & B_\rho & 0 & 0 \\ & & & D_\rho & 0 \\ \text{сим.} & & & & D_\rho \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

— матрица приведенных инерционных характеристик многослойного пакета. В общем случае для распределения перемещений (2.106) матрица  $\mathcal{M}$  вычисляется так:

$$\mathcal{M} = \int_{-l}^l \rho \mathbf{f}_v^T \mathbf{f}_v \frac{H_1 H_2}{A_1 A_2} dz.$$

Для вычисления коэффициентов  $B_\rho$ ,  $C_\rho$ ,  $D_\rho$  можно пользоваться приближенными формулами

$$B_\rho = \sum_{i=1}^k \bar{\rho}_{[i]} t_1^{[i]}; \\ C_\rho = \sum_{i=1}^k \bar{\rho}_{[i]} t_2^{[i]}; \quad D_\rho = \sum_{i=1}^k \bar{\rho}_{[i]} t_3^{[i]},$$

где

$$\bar{\rho}_{[i]} = \rho_{[i]} (1 + k_1 t_{[i]}) (1 + k_2 t_{[i]}); \\ t_1^{[i]} = z_{(i)} - z_{(i-1)}; \quad t_2^{[i]} = (z_{(i)}^2 - z_{(i-1)}^2)/2; \\ t_3^{[i]} = (z_{(i)}^3 - z_{(i-1)}^3)/3; \quad t_{[i]} = (z_{(i)} + z_{(i-1)})/2;$$

$\rho_{[i]}$  — плотность  $i$ -го слоя,  $k$  — число слоев;  $z_{(i-1)}$ ,  $z_{(i)}$  — начальная и конечная координаты  $i$ -го слоя.

Воспользуемся периодичностью решения по угловой координате  $\alpha_2$  и представим искомые функции аналогично (5.3). Так же, как это было сделано в разделе 5.1.1, введем вектор-столбцы обобщенных перемещений  $\mathbf{X}$  и производных  $\mathbf{Y}$ . Тогда для  $n$ -й гармоники разложения дополнительно к деформационным соотношениям (5.6) запишем выражения для углов поворота нормали и перемещений

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \mathbf{R}_{1n} \mathbf{X}_n + \mathbf{R}_{2n} \mathbf{Y}_n; \\ u_n &= \mathbf{F}_{1n} \mathbf{X}_n + \mathbf{F}_{2n} \mathbf{Y}_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

После выполнения процедур вариационно-матричного способа получим однородную разрешающую систему дифференциальных уравнений для решения задач устойчивости и колебаний

$$\frac{1}{A_1} \frac{d}{d\alpha_1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Матричные блоки  $\mathbf{A}_{ij}$  системы (5.36) определяются выражениями (5.10) при

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ij} &= \mathbf{A}_2 (\mathbf{B}_{in}^T \mathcal{D} \mathbf{B}_{jn} - \Lambda \mathbf{R}_{in}^T \mathcal{N}_0 \mathbf{R}_{jn} - \omega^2 \mathbf{F}_{in}^T \mathcal{M} \mathbf{F}_{jn}), \\ (i, j &= 1, 2). \end{aligned} \quad (5.37)$$

С учетом того, что обобщенные перемещения  $\mathbf{X}_n$  и силовые факторы  $\lambda_n$  являются дополнительными, граничные условия на торцах рассматриваемой оболочки будут однородными.

Отличие процедур получения канонической системы (5.36) от процедур получения матрицы разрешающей системы дифференциальных уравнений для решения задачи статики (5.9) заключается в вычислении матриц  $\mathbf{S}_{ij}$ . Матрицы  $\mathbf{S}_{ij}$  (5.37) содержат кроме жесткостных характеристик информацию о начальном напряженном состоянии, а также инерционные характеристики системы.

Полученная система дифференциальных уравнений (5.36) позволяет для многослойной оболочки вращения решать задачи устойчивости и определять критический параметр нагружения. Для этого в выражении  $\mathbf{S}_{ij}$  (5.37) следует положить  $\omega^2 = 0$ . Для определения частот колебаний оболочки вычисление матриц  $\mathbf{S}_{ij}$  (5.37) выполняется при  $\Lambda = \text{const}$ . В частном случае при  $\Lambda = 0$  определяются частоты ненагруженной системы.

Поскольку искомым параметром собственного значения  $\Lambda$  (или  $\omega^2$ ) входят в коэффициенты матрицы разрешающих дифференциальных уравнений, то коэффициенты матрицы фундаментальных решений, а следовательно, и коэффициенты жесткости кольцевого оболочечного элемента будут в общем случае иметь нелинейную зависимость от  $\Lambda$  (или  $\omega^2$ ). В случае разбивки оболочки на короткие элементы для каждого элемента можно применить прием линеаризации матрицы жесткости по параметру собственного значения и выделить для элемента мат-

рицу, аналогичную (в МКЭ) матрице приведенных начальных напряжений (или матрице приведенных масс) конечного элемента.

## 5.2.2. Подпрограмма получения канонической системы для решения задач на собственные значения

Разрешающую систему дифференциальных уравнений (5.36) представим в виде

$$\frac{d}{d\alpha_1} Z = AZ, \quad (5.38)$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}; \quad A = A_1 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Составим подпрограмму вычисления матрицы канонической системы  $A$  (см. (5.38)).

В качестве исходных примем:  $NX, NY, NE, N, B1, B2, DD, C1, C2, A1, A2$  — даны в описании подпрограммы STAN (раздел 5.1.2);  $AN(2,2)$  — массив, соответствующий матрице  $\Lambda^0$ ;  $AM(5,5)$  — массив, соответствующий матрице  $\omega^2 M$ ;  $R1(2, NX)$  — массив, соответствующий матрице  $R_{1n}$  (5.35);  $R2(2, NY)$  — массив, соответствующий матрице  $R_{2n}$  (5.35);  $F1(5, NX)$  — массив, соответствующий матрице  $F_{1n}$  (5.35);  $F2(5, NY)$  — массив, соответствующий матрице  $F_{2n}$  (5.35).

В результате работы подпрограммы STAS получим:  $A(N, N)$  — массив, содержащий коэффициенты матрицы  $A$  разрешающей системы дифференциальных уравнений (5.38).

Рабочие массивы:  $B(NX, NY), D(NX, NX), S(NY, NY), S11(NX, NX), S22(NY, NY), S21(NY, NX), BD(NX, NE), R11(NX, NX), R22(NY, NY), R21(NY, NX), F11(NX, NX), F22(NY, NY), F21(NY, NX)$ .

Массивы  $DD, C1, AN, AM$  после работы подпрограммы не сохраняются. При работе подпрограммы STAS используются подпрограммы MUM, MTM, MMT, MATIN, SKM (Приложение 2).

Текст подпрограммы STAS

```
SUBROUTINE STAS(NX, NY, NE, N, B1, B2, DD,
* C1, C2, A1, A2, AN, AM, R1, R2, F1, F2, A, B, D,
* S, S11, S22, S21, BD, R11, R22, R21, F11, F22, F21)
DIMENSION B1(NE, NX), B2(NE, NY), DD(NE, NE),
* C1(NX, NX), C2(NX, NY), AN(2,2), AM(5,5), R1(2, NX),
* R2(2, NY), F1(5, NX), F2(5, NY), A(N, N), B(NX, NY),
* D(NX, NY), S(NY, NY), S11(NX, NX), S22(NY, NY),
* S21(NY, NX), BD(NX, NE), R11(NX, NX), R22(NY, NY),
* R21(NY, NX), F11(NX, NX), F22(NY, NY), F21(NY, NX),
CALL SKM(DD, A2, NE, NE)
CALL SKM(AN, A2, 2, 2)
CALL SKM(AM, A2, 5, 5)
CALL MTM(B1, DD, BD, NE, NX, NE)
CALL MUM(BD, B1, S11, NX, NE, NX)
CALL MTM(R1, AN, BD, 2, NX, 2)
CALL MUM(BD, R1, R11, NX, 2, NX)
CALL MTM(F1, AM, BD, 5, NX, 5)
CALL MUM(BD, F1, F11, NX, 5, NX)
CALL MTM(B2, DD, BD, NE, NY, NE)
CALL MUM(BD, B2, S22, NY, NE, NY)
CALL MUM(BD, B1, S21, NY, NE, NX)
CALL MTM(R2, AN, BD, 2, NY, 2)
CALL MUM(BD, R2, R22, NY, 2, NY)
```

```

CALL MUM(BD, R1, R21, NY, 2, NX)
CALL MTM(F2, AM, BD, 5, NY, 5)
CALL MUM(BD, F2, F22, NY, 5, NY)
CALL MUM(BD, F1, F21, NY, 5, NX)
DO 1 I=1, NX
  IN=I+NX
DO 1 J=1, NX
  A(I, J)=C1(I, J)
1 A(IN, J)=S11(I, J)—R11(I, J)—F11(I, J)
DO 10 I=1, NY
DO 10 J=1, NY
10 S22(I, J)=S22(I, J)—R22(I, J)—F22(I, J)
DO 11 I=1, NY
DO 11 J=1, NX
11 S21(I, J)=S21(I, J)—R21(I, J)—F21(I, J)
CALL MATIN(S22, S, NY)
CALL MUM(C2, S, B, NX, NY, NY)
CALL MTM(S21, S, D, NY, NX, NY)
CALL MMT(B, C2, C1, NX, NY, NX)
CALL MUM(B, S21, S11, NX, NY, NX)
DO 2 J=1, NX
  JN=J+NX
DO 2 I=1, NX
  IN=I+NX
  A(I, J)=A(I, J)—S11(I, J)
  A(JN, IN)=—A(I, J)
2 A(I, JN)=C1(I, J)
CALL MUM(D, S21, C1, NX, NY, NX)
DO 3 I=1, NX
  IN=I+NX
DO 3 J=1, NX
3 A(IN, J)=A(IN, J)—C1(I, J)
CALL SKM(A, A1, N, N)
RETURN
END

```

### 5.2.3. Устойчивость и колебания тонких многослойных оболочек

Исходные данные для получения разрешающей системы (5.36):

матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  в разделе 5.1.3.;

матрица приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$  (4.19);

матрицы  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$ ,  $F_{1n}$ ,  $F_{2n}$  (см. (5.35)) имеют следующий вид:

$$R_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix}; \quad R_{2n} = \underset{(2 \times 3)}{0}$$

$$F_{1n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix}; \quad F_{2n} = \underset{(5 \times 3)}{0},$$

где  $\underset{(i \times j)}{0}$  — нулевая матрица размерности  $(i \times j)$ .

При вычислении коэффициентов  $B_p$ ,  $C_p$ ,  $D_p$  матрицы  $\mathcal{M}$  (5.34) изменение метрических характеристик можно не учитывать.

Компоненты векторов  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $\lambda$  определены в разделе 5.1.3.

#### 5.2.4. Учет деформаций поперечных сдвигов

Исходными данными для получения разрешающей системы (5.36) будут матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , приведенные в разделе 5.1.4; матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  имеет структуру (4.6); матрицы  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$ ,  $F_{1n}$ ,  $F_{2n}$  (5.35) имеют следующий вид:

$$R_{1n} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1n} = F_{(5 \times 5)}; \quad F_{2n} = 0_{(5 \times 5)},$$

где  $F_{(5 \times 5)}$  — единичная матрица размерности  $(5 \times 5)$ .

Компоненты векторов  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $\lambda$  определены в разделе 5.1.4.

#### 5.2.5. Учет деформаций поперечных сдвигов и изменения метрических характеристик

Исходные данные для получения разрешающей системы (5.36):

матрицы  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , приведенные в разделе 5.1.5; коэффициенты матрицы приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  определяются с учетом изменения метрических свойств (пример 2.2 и подпрограмма DKSL). Матрицы  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$ ,  $F_{1n}$ ,  $F_{2n}$  определяются соотношениями (5.39). Коэффициенты матрицы приведенных инерционных характеристик  $\mathcal{M}$  (5.34) вычисляются с учетом изменения метрических характеристик (подпрограмма MKSL в разделе 5.2.6).

#### 5.2.6. Подпрограмма вычисления приведенных инерционных характеристик многослойного пакета

В качестве исходных данных примем: RK1, RK2, KSL, H, E — даны в описании DKSL (пример 2.2); RR(KSL) — массив, коэффициенты которого содержат значения удельных плотностей слоев  $\rho_{[i]}$ ;

В результате работы подпрограммы MKSL получим: AMM(5, 5) — массив, соответствующий матрице приведенных инерционных характеристик  $\mathcal{M}$  (5.34).

Текст подпрограммы MKSL

```
SUBROUTINE MKSL(RK1, RK2, KSL, H, E, RR, AMM)
  DIMENSION H(KSL), RR(KSL), AMM(5,5)
  DO 1 I=1,5
  DO 1 J=1,5
```



```

1 AMM(I, J) = 0.
  Z1 = -E
  DO 2 I = 1, KSL
    Z2 = Z1 + H(I)
    T1 = H(I)
    T2 = (Z2**2 - Z1**2) * 0.5
    T3 = (Z2**3 - Z1**3) / 3.
    T = 0.5 * (Z1 + Z2)
    S = (1. + RK1 * T) * (1. + RK2 * T) * RR(I)
    AMM(1,1) = AMM(1,1) + S * T1
    AMM(1,4) = AMM(1,4) + S * T2
    AMM(4,4) = AMM(4,4) + S * T3
2  Z1 = Z2
  AMM(2,2) = AMM(1,1)
  AMM(3,3) = AMM(1,1)
  AMM(2,5) = AMM(1,4)
  AMM(5,5) = AMM(4,4)
  AMM(4,1) = AMM(1,4)
  AMM(5,2) = AMM(2,5)
  RETURN
END

```

### 5.3. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

#### 5.3.1. Задача статики свободно опертой многослойной цилиндрической оболочки

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, свободно опертую по торцам  $x=0$  и  $x=l$  (рис. 5.2), нагружен-

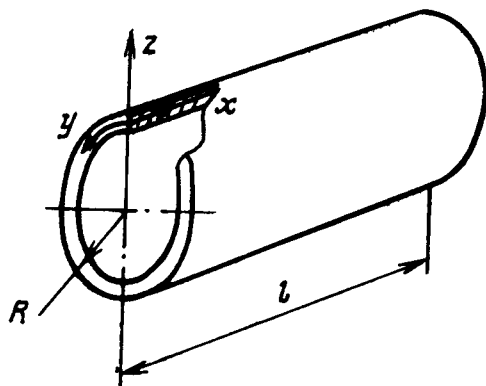


Рис. 5.2. Многослойная цилиндрическая оболочка

ную нормальными силами  $p$  и  $q$  по внутренней и внешней поверхностям (рис. 5.3). Граничные условия свободного опирания предполагают отсутствие на торцах нормального прогиба  $w$ , касательного перемещения  $u_2$ , угла поворота сечения в плоско-

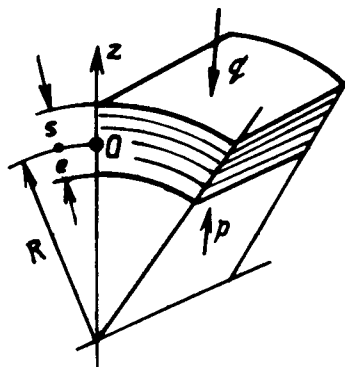


Рис. 5.3. Поверхностные нагрузки, действующие на цилиндрическую оболочку

сти торца, осевого усилия и изгибающего момента  $M_1$ . Такие граничные условия приближенно моделируют опирание края оболочки на шпангоут, жесткий в своей плоскости и податливый при кручении и изгибе из плоскости.

Для решения воспользуемся вариационной формулировкой задачи, основанной на принципе возможных перемещений. С учетом граничных условий запишем

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} \delta \mathcal{E}^T \mathcal{N} dy dx - \int_0^l \int_0^{2\pi R} \delta \mathbf{X}^T \mathbf{p} dy dx = 0, \quad (5.39)$$

где

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \psi_1, \psi_2]^T; \quad (5.40)$$

$$\mathcal{N} = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}, Q_1, Q_2]^T; \quad (5.41)$$

$$\mathbf{X} = [\varpi, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2]^T; \quad (5.42)$$

$$\mathbf{p} = [p_3, 0, 0, 0, 0]^T; \quad (5.43)$$

$p_3 = (1 - e/R)p - (1 + s/R)q$ ;  $e$  и  $s$  — расстояния от координатной поверхности до внутренней и внешней поверхностей цилиндрической оболочки (рис. 5.3);  $x, y$  — осевая и окружная координаты.

**Замечания.** Следует обратить внимание, что включение в компоненты вектор-столбца обобщенных перемещений  $\mathbf{X}$  (5.42) средних углов поперечного сдвига  $\psi_1, \psi_2$  (а не углов поворота сечений  $\theta_1, \theta_2$ ) возможно только для граничных условий свободного опирания. В этом случае разрешающие системы алгебраических уравнений не содержат особенностей при переходе к тонким оболочкам и дают результаты, соответствующие гипотезам Кирхгофа—Лява. При выборе обобщенных перемещений

в виде  $X=[w, \theta_1, \theta_2, u_1, u_2]^T$  определитель разрешающей системы стремится к нулю при  $R/h \rightarrow \infty$ .

Связь обобщенных деформаций с обобщенными перемещениями устанавливается согласно деформационным соотношениям (2.92) при

$$\begin{aligned} A_1 \partial \alpha_1 &= \partial x; \quad A_2 \partial \alpha_2 = \partial y; \quad \varphi_{21} = \varphi_{12} = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 1/R; \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x}; \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial y}; \\ \kappa_1 &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y}; \\ \kappa_{12} &= \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y}; \\ \kappa_{21} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где использованы соотношения

$$\theta_1 = \psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_2 = \psi_2 + \frac{u_2}{R} - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Связь внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}$  с обобщенными деформациями  $\mathcal{E}$  определяется соотношениями упругости (5.2); коэффициенты матрицы  $\mathcal{D}$  вычисляются согласно зависимостям (2.17) с учетом нулевой кривизны оболочки в меридиональном направлении ( $k_1=0$ ).

При симметричном (относительно вертикальной плоскости  $y=0$ ) нагружении в случае, когда оси упругой симметрии совпадают с линиями главных кривизн, решение может быть представлено в виде двойных тригонометрических рядов

$$\begin{pmatrix} p, & w \\ N_1, & \varepsilon_1 \\ N_2, & \varepsilon_2 \\ M_1, & \kappa_1 \\ M_2, & \kappa_2 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_{mn}, & w_{mn} \\ N_{1mn}, & \varepsilon_{1mn} \\ N_{2mn}, & \varepsilon_{2mn} \\ M_{1mn}, & \kappa_{1mn} \\ M_{2mn}, & \kappa_{2mn} \end{pmatrix} \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y;$$

$$\begin{pmatrix} u_1, & \theta_1 \\ Q_1, & \psi_1 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{1mn}, & \theta_{1mn} \\ Q_{1mn}, & \psi_{1mn} \end{pmatrix} \cos \bar{m}x \cos \bar{n}y;$$

$$\begin{pmatrix} u_2, & \theta_2 \\ Q_2, & \psi_2 \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{2mn}, & \theta_{2mn} \\ Q_{2mn}, & \psi_{2mn} \end{pmatrix} \sin \bar{m}x \sin \bar{n}y;$$

$$\begin{pmatrix} N_{12}, & \varepsilon_{12} \\ N_{21}, & \varepsilon_{21} \\ M_{12}, & \kappa_{12} \\ M_{21}, & \kappa_{21} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} N_{12mn}, & \varepsilon_{12mn} \\ N_{21mn}, & \varepsilon_{21mn} \\ M_{12mn}, & \kappa_{12mn} \\ M_{21mn}, & \kappa_{21mn} \end{pmatrix} \cos \bar{m}x \sin \bar{n}y;$$

$$\bar{m} = m\pi/l; \quad \bar{n} = n/R$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{emn} \mathcal{E}_{mn}; \\ \mathcal{N} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{Nmn} \mathcal{N}_{mn}; \\ \mathbf{X} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{xmn} \mathbf{X}_{mn}; \\ \mathbf{p} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{pmn} \mathbf{p}_{mn}; \\ \beta_{emn} &= [s_m c_n, s_m c_n, c_m s_n, c_m s_n, s_m c_n, s_m c_n, \\ & c_m s_n, c_m s_n, c_m c_n, s_m s_n]; \\ \beta_{xmn} &= \beta_{pmn} = [s_m c_n, c_m c_n, s_m s_n, c_m c_n, s_m s_n].\end{aligned}\tag{5.45}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}s_m &= \sin \bar{m}x; \quad c_m = \cos \bar{m}x; \quad \bar{m} = m\pi/l; \\ s_n &= \sin \bar{n}y; \quad c_n = \cos \bar{n}y; \quad \bar{n} = n/R.\end{aligned}$$

С учетом соотношений (4.45) можно представить связь амплитудных значений гармоник разложения  $\mathcal{E}_{mn}$  и  $\mathbf{X}_{mn}$  в следующем виде:

$$\mathcal{E}_{mn} = \mathbf{B}_{mn} \mathbf{X}_{mn},\tag{5.46}$$

где

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\bar{m} & 0 \\ 1/R & 0 & 0 & 0 & \bar{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{m} \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{n} & 0 \\ \bar{m}^2 & -\bar{m} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{n}^2 & 0 & \bar{n} & 0 & \bar{n}/R \\ \bar{m}\bar{n} & 0 & \bar{m} & 0 & \bar{m}/R \\ \bar{m}\bar{n} & -\bar{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для  $\mathcal{N}_{mn}$  и  $\mathcal{E}_{mn}$  связь устанавливается приведенными соотношениями упругости

$$\mathcal{N}_{mn} = \mathcal{D} \mathcal{E}_{mn}.\tag{5.47}$$

После подстановки в вариационную формулировку задачи (5.39) выражений (5.45)–(5.47) и выполнения операций интегрирования получим для  $m, n$ -й гармоники разложения решения систему линейных алгебраических уравнений

$$K_{mn}X_{mn}=P_{mn}, \quad (5.48)$$

где

$$K_{mn}=d_*B_{mn}^TDB_{mn};$$

$$d_*=\begin{cases} \pi Rl/2 & \text{при } n \neq 0, \quad m=1, 2, 3, \dots \\ \pi Rl & \text{при } n=0, \quad m=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.49)$$

представляет приведенную матрицу жесткости;  $P_{mn}$  — вектор-столбец приведенных нагрузок. Для рассматриваемой задачи в вектор-столбце  $P_{mn}$  содержится только один (первый) ненулевой коэффициент

$$P_{mn}^1 = \int_0^e \int_0^{2\pi R} p(x, y) \sin \bar{m}x \cos \bar{n}y dy dx.$$

Для случая равномерного давления

$$P_{mn}^1 = \begin{cases} 4pRl/m & \text{при } n=0, \quad m=1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

При нагружении оболочки системой  $N$  сосредоточенных нормальных сил (симметрично расположенных относительно образующей  $y=0$ ) для вычисления коэффициентов  $P_{mn}^1$  можно воспользоваться выражением

$$P_{mn}^1 = \sum_{i=1}^N P_i \sin \bar{m}x_i \cos \bar{n}y_i,$$

где  $P_i$  — значение нормальной силы (положительное направление вдоль внешней нормали);  $x_i, y_i$  — координаты  $x, y$  точки приложения  $i$ -й силы.

После решения системы алгебраических уравнений (5.48) и определения коэффициентов вектор-столбца  $X_{mn}$  вычисляются компоненты  $\mathcal{E}_{mn}$  (5.46). Далее согласно (5.45) производится накопление результатов в точках вывода.

Рассмотрим один частный случай расчета, относящийся к тонким цилиндрическим многослойным оболочкам, нагруженным нормальными силами. При расчете таких оболочек можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине, деформации поперечных сдвигов можно положить равными нулю. Решением для  $m, n$ -й гармоники разложения будут следующие амплитудные значения перемещений:

$$\begin{aligned}
u_{1mn} &= \frac{p_{mn}}{D} (d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23}); \\
u_{2mn} &= \frac{p_{mn}}{D} (d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23}); \\
w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D} (d_{11}d_{22} - d_{12}^2),
\end{aligned} \tag{5.51}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= c_{ij} + a_{ij}; \quad p_{mn} = P_{mn}^1 / d_* \\
c_{11} &= 0; \quad c_{12} = \frac{1}{R} (C_{12} + C_{33}) \bar{m} \bar{n}; \quad c_{13} = \frac{B_{12}}{R} \bar{m}; \\
c_{22} &= \frac{1}{R} \left( 2C_{33} + \frac{D_{33}}{R} \right) \bar{m}^2 + \frac{1}{R} \left( 2C_{22} + \frac{D_{22}}{R} \right) \bar{n}^2; \\
c_{23} &= \left( B_{22} + \frac{C_{22}}{R} \right) \frac{\bar{n}}{R} + \frac{1}{R} (D_{12} - 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n} + \frac{D_{22}}{R} \bar{n}^3; \\
c_{33} &= \frac{B_{22}}{R^2} + \frac{2}{R} (C_{12} \bar{m}^2 + C_{22} \bar{n}^2); \\
a_{11} &= B_{11} \bar{m}^2 + B_{33} \bar{n}^2; \quad a_{12} = (B_{12} + B_{33}) \bar{m} \bar{n}; \\
a_{22} &= B_{33} \bar{m}^2 + B_{22} \bar{n}^2; \\
a_{13} &= C_{11} \bar{m}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m} \bar{n}^2; \\
a_{23} &= C_{22} \bar{n}^3 + (C_{12} + 2C_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}; \\
a_{33} &= D_{11} \bar{m}^4 + 2(D_{12} + 2D_{33}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^4; \\
D &= d_{33} (d_{11}d_{22} - d_{12}^2) - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{13}^2 + 2d_{12}d_{13}d_{23}.
\end{aligned}$$

Для вычисления амплитудных значений гармоник разложения обобщенных деформаций можно воспользоваться зависимостями (5.48), положив  $\psi_{1mn}$  и  $\psi_{2mn}$  равными нулю.

### 5.3.2. Подпрограмма определения напряженно-деформированного состояния многослойной цилиндрической оболочки

Воспользуемся алгоритмом расчета многослойной оболочки, рассмотренным в разд. 5.3.1.

В качестве исходных данных примем:

KSL, CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), E — даны в описании исходных данных подпрограммы DKSL (пример 2.2); R — радиус координатной поверхности R цилиндрической оболочки; DL — длина цилиндрической оболочки; PP — нормальное давление p; NSIL — число сосредоточенных сил; XP(2, NSIL) — массив координат точек приложения сосредоточенных сил. В i-м столбце массива последовательно размещаются значения координат  $x_i, y_i$ ; PN(NSIL) — массив значений сосредоточенных сил; NR — число точек вывода результатов расчета; XR(2, NR) — координаты точек вывода. В i-м столбце массива последовательно размещаются координаты  $x_i, y_i$ ; MM, NN — предельные номера гармоник разложения по осевой и окружной координатам.

В результате работы подпрограммы CILIN получим:

EP(4, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; CA(4, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}, \kappa_{21}$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; PS(2, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\psi_1, \psi_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; U(3, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\omega, u_1, u_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода; TET(2, NR) — массив, содержащий в  $i$ -м столбце значения  $\theta_1, \theta_2$ , вычисленные в  $i$ -й точке вывода.

Подпрограмма CILIN использует подпрограммы DKSL (пример 2.2), MUM, MTM, SKM, GAUSS (Приложение 2).

Текст подпрограммы CILIN

```
SUBROUTINE CILIN(KSL, CC, H, F, E, R, DL, PP,
* NSIL, XP, PN, NR, XR, EP, CA, PS, U, TET, MM, NN)
DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), XP(2, NSIL),
* PN(NSIL), XR(2, NR), EP(4, NR), CA(4, NR), PS(2, NR),
* N(3, NR), TET(2, NR), D(10, 10), B(10, 5), BD(10, 5),
* ST(5,5), P(5), X(5)
RK1=0.
RK2=1./R
CALL DKSL(RK1, RK2, KSL, CC, H, F, E, D)
DO 1 I=1,10
DO 1 J=1,5
1 B(I, J)=0.
B(2,1)=RK2
B(9,2)=1.
B(10,3)=1.
DZ0=3.1416*R*DL
DZ1=DZ0/2.
DO 5 J=1, NR
DO 2 I=1,2
PS(I, J)=0.
2 TET(I, J)=0.
DO 3 I=1,3
3 U(I, J)=0.
DO 4 I=1,4
EP(I, J)=0.
4 CA(I, J)=0.
5 CONTINUE
N1=NN+1
DO 6 M=1, MM
AM=3.1416*M/DL
B(5,1)=AM*AM
B(5,2)=-AM
B(7,3)=AM
B(1,4)=-AM
B(3,5)=AM
B(7,5)=AM*RK2
PM=4.*PP*R*DL/M
DO 6 N0=1, N1
N=N0-1
AN=N*RK2
B(6,1)=AN*AN
B(7,1)=AM*AN
B(8,1)=B(7,1)
B(8,2)=-AN
B(6,3)=AN
B(4,4)=-AN
B(2,5)=AN
B(6,5)=AN*RK2
CALL MTM(B, D, BD, 10, 5, 10)
```

```

CALL MUM(BD, B, ST, 5, 10, 5)
S=DZ1
IF(N.EQ.0) S=DZ0
CALL SKM(ST, S, 5, 5)
DO 7 I=1,5
7 P(I)=0.
IF(N.EQ.0) P(1)=PM
IF(NSIL.EQ.0)GOTO 9
DO 8 I=1, NSIL
XM=AM*XP(1, I)
YN=AN*XP(2, I)
8 P(1)=P(1)+PN(I)*SIN(XM)*COS(YN)
9 CONTINUE
CALL GAUSS(ST, P, X, 5)
DO 10 I=1, NR
XM=AM*XR(1, I)
YN=AN*XR(2, I)
SM=SIN(XM)
CM=COS(XM)
SN=SIN(YN)
CN=COS(YN)
U(1, I)=U(1, I)+X(1)*SM*CN
U(2, I)=U(2, I)+X(4)*CM*CN
U(3, I)=U(3, I)+X(5)*SM*SN
TET(1, I)=TET(1, I)+(X(2)-AM*X(1))*CM*CN
TET(2, I)=TET(2, I)+(X(3)+RK2*X(5)+
* AN*X(1))*SM*SN
EP(1, I)=EP(1, I)-AM*X(4)*SM*CN
EP(2, I)=EP(2, I)+(X(1)*RK2+AN*X(5))*SM*CN
EP(3, I)=EP(3, I)+AM*X(5)*CM*CN
EP(4, I)=EP(4, I)-AN*X(4)*CM*SN
CA(1, I)=CA(1, I)+(AM*AM*X(1)-AM*X(2))*SM*CN
CA(2, I)=CA(2, I)+(AN*AN*X(1)+AN*X(3)+
* AN*RK2*X(5))*SM*CN
CA(3, I)=CA(3, I)+(AM*AN*X(1)+AM*X(3)+
* AM*RK2*X(5))*CM*SN
CA(4, I)=CA(4, I)+(AM*AN*X(1)-AN*X(2))*CM*SN
10 CONTINUE
6 CONTINUE
RETURN
END

```

### 5.3.3. Осесимметричное деформирование многослойных цилиндрических оболочек

Для замкнутых цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением  $p$ , внешним давлением  $q$  и осевыми усилиями  $N = \text{const}$ , не изменяющимися по окружной координате  $y$ , исходными данными для проведения расчета будут следующие соотношения.

Связь деформаций с перемещениями:

$$\varepsilon_1 = u'; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}; \quad \kappa_1 = \theta_1'; \quad \psi_1 = \theta_1 + w', \quad (5.52)$$

где  $(\cdot)' = d/dx$ . Физические соотношения



$$\begin{aligned}
N_1 &= B_x \varepsilon_1 + B_{xy} \varepsilon_2; \\
N_2 &= B_{xy} \varepsilon_1 + B_y \varepsilon_2 + C_{xy} \kappa_1; \\
M_1 &= C_{xy} \varepsilon_2 + D_x \kappa_1; \\
Q_1 &= K_x \psi_1.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Расстояние  $e$  от внутренней поверхности до координатной выбрано так, чтобы смешанная жесткость  $C_x$  обращалась в ноль. В этом случае  $C_x = C_{11} - eB_{11} = 0$ ;

$$\begin{aligned}
e &= C_{11}/B_{11}; \quad B_x = B_{11}; \quad B_{xy} = B_{12}; \quad B_y = B_{22}; \\
C_{xy} &= C_{12} - eB_{12}; \quad D_x = D_{11} - eC_{11}; \quad K_x = K_{11},
\end{aligned}$$

где жесткостные коэффициенты  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ) вычислены для произвольно выбранной координатной поверхности.

Коэффициент  $D_x$  представляет минимальную изгибную жесткость в осевом направлении с учетом примечания к формуле (3.49).

Каноническая система разрешающих дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_1' &= -\frac{B_{xy}}{RB_x} w + \frac{1}{B_x} N_1; \\
w' &= -\theta_1 + \frac{1}{K_x} Q_1; \\
\theta_1' &= -\frac{C_{xy}}{RD_x} w + \frac{1}{D_x} M_1; \\
N_1' &= 0; \\
Q_1' &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{B}{B_x} - \frac{C_{xy}^2}{D_x} \right) w + \frac{B_{xy}}{RB_x} N_1 + \frac{C_{xy}}{RD_x} M_1 - p_3; \\
M_1' &= Q_1,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

где  $B = B_x B_y - B_{xy}^2$ ;  $p_3 = p(1 - e/R) - q(1 + s/R)$ ;  $p$  — внутреннее давление;  $q$  — внешнее давление (рис. 5.3).

Если в качестве вектора состояния принять  $Z = [u_1, w, \theta_1, N_1, Q_1, M_1]^T$ , то полученную разрешающую систему дифференциальных уравнений (5.54) можно записать в следующем матричном виде:

$$Z' = AZ + H, \tag{5.55}$$

где

$$Z' = \frac{d}{dx} [u_1, w, \theta_1, N_1, Q_1, M_1]^T;$$

$$H = [0, 0, 0, 0, -p_3, 0]^T;$$

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{12} & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right];$$

$$a_{12} = B_{xy}/(RB_x); \quad a_{14} = 1/B_x; \quad a_{25} = 1/K_x;$$

$$a_{32} = C_{xy}/(RD_x); \quad a_{36} = 1/D_x; \quad a_{52} = (B/B_x - C_{xy}^2/D_x)/R^2.$$

Решение системы будем искать в форме  $Z = Z_* + \hat{Z}$ , где  $Z_*$  — решение однородной системы  $Z_*' = AZ_*$ ,  $\hat{Z}$  — частное решение неоднородной системы (5.55). Для однородной системы с постоянными коэффициентами примем вид решения  $Z_* = Se^{v\tau}$ . Для определения коэффициентов  $v$  получим характеристическое уравнение  $\det(A - vE) = 0$  или в развернутом виде:

$$\det \begin{bmatrix} -v & -a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -v & -1 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & -a_{32} & -v & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & -v & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{12} & -v & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -v \end{bmatrix} =$$

$$= v^2(v^4 - 2k_1^2v^2 + k_2^4) = 0, \quad (5.56)$$

где

$$2k_1^2 = 2a_{32} + a_{25}a_{52}; \quad k_2^4 = a_{32}a_{36} + a_{32}^2$$

или

$$k_1^2 = \frac{1}{2RD_x} \left[ C_{xy} \left( 2 - \frac{C_{xy}}{RK_x} \right) + \frac{BD_x}{RB_xK_x} \right]; \quad k_2^4 = \frac{B}{R^2B_xD_x}.$$

Два нулевых корня уравнения (5.56) соответствуют осевому смещению оболочки как твердого тела и равномерному растяжению вдоль оси  $ox$ . Четыре ненулевых корня уравнения (5.56) определяются в зависимости от соотношений  $k_1$  и  $k_2$  следующим образом [11]:

при

$$k_1^2 < k_2^2; \quad v_{1,2} = -r \pm it; \quad v_{3,4} = r \pm it,$$

где

$$r = \sqrt{(k_2^2 + k_1^2)/2}; \quad t = \sqrt{(k_2^2 - k_1^2)/2}; \quad (5.57)$$

при  $k_1^2 > k_2^2$

$$v_1 = -r_1; \quad v_2 = -r_2; \quad v_3 = r_1; \quad v_4 = r_2,$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4 - k_2^4}}. \quad (5.58)$$

При постоянном давлении  $p_3$  и осевой растягивающей силе  $N_1 = N$  полное решение системы (5.55) можно представить так:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left( Nx - \frac{B_{xy}}{R} \int w dx \right) / B_x + \hat{u}; \\ N_1 &= N \\ w &= \sum_{i=1}^4 C_i \Phi_{wi}(x) + \hat{w}; \\ \theta_1 &= \sum_{i=1}^4 C_i \Phi_{\theta i}(x); \\ Q_1 &= \sum_{i=1}^4 C_i \Phi_{Qi}(x); \\ M_1 &= \sum_{i=1}^4 C_i \Phi_{Mi}(x) + \hat{M}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{w} &= R(p_3 R B_x - N B_{xy}) / B; \\ \hat{M} &= C_{xy} \hat{w} / R; \end{aligned} \quad (5.60)$$

$\hat{u}$  — осевое смещение цилиндрической оболочки как твердого тела.

Константы  $C_i$  ( $i=1 \dots 4$ ), присутствующие в решениях (5.59), определяются с использованием граничных условий задачи. Функции  $\Phi_{wi}$ ,  $\Phi_{\theta i}$ ,  $\Phi_{Qi}$ ,  $\Phi_{Mi}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{Mi} &= \Phi_i; \quad \Phi_{Qi} = \Phi_i'; \\ \Phi_{wi} &= \frac{1}{a_{52}} \Phi_i'' - \frac{a_{12}}{a_{52}} \Phi_i; \\ \Phi_{\theta i} &= -\frac{1}{a_{52}} \Phi_i''' + a_* \Phi_i'; \quad a_* = a_{25} + a_{32}/a_{52}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Для расчета коротких оболочек, края которых «влияют» друг на друга, удобно пользоваться функциями:

$$\begin{aligned} &\text{при } k_1^2 < k_2^2 \\ &\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} r x \cos t x; & \Phi_2 &= \operatorname{sh} r x \sin t x; \\ \Phi_3 &= \operatorname{ch} r x \sin t x; & \Phi_4 &= \operatorname{sh} r x \cos t x, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.62)$$

где  $r$  и  $t$  вычисляются согласно (5.57);

$$\text{при } k_1^2 > k_2^2$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \operatorname{ch} r_1 x; & \Phi_2 &= \operatorname{ch} r_2 x; \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} r_1 x; & \Phi_4 &= \operatorname{sh} r_2 x,\end{aligned}\quad (5.63)$$

где  $r_1, r_2$  вычисляются согласно (5.58).

Для расчета длинных оболочек, края которых практически «не влияют» друг на друга, используется запись через экспоненциальные функции:

при  $k_1^2 < k_2^2$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= e^{-r_1 x} \cos tx; & \Phi_2 &= e^{-r_2 x} \sin tx; \\ \Phi_3 &= e^{r_1 x} \cos tx; & \Phi_4 &= e^{r_2 x} \sin tx,\end{aligned}\quad (5.64)$$

при  $k_1^2 > k_2^2$

$$\Phi_1 = e^{-r_1 x}; \quad \Phi_2 = e^{-r_2 x}; \quad \Phi_3 = e^{r_1 x}; \quad \Phi_4 = e^{r_2 x}. \quad (5.65)$$

Для определения коэффициентов  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) используются четыре граничных условия задачи, которые при  $x=0$  и  $x=l$  могут быть сформулированы для  $\theta_1$  (либо  $M_1$ ), а также для  $w$  (либо  $Q_1$ ).

При анализе краевого эффекта вблизи  $x=0$  для длинных оболочек можно воспользоваться функциями (5.64) или (5.65) (в зависимости от соотношения параметров  $k_1^2$  и  $k_2^2$ ), положив  $C_3=C_4=0$ , а коэффициенты  $C_1, C_2$  определить из граничных условий при  $x=0$ .

Для удобства проведения вычислений в табл. 5.1 представлены функции  $\Phi_i$  и их производные; в табл. 5.2 приводятся выражения для функций решений  $\Phi_{Mi}, \Phi_{Qi}, \Phi_{wi}, \Phi_{\theta i}$ ; в табл. 5.3 даны значения функций решения при  $x=0$  (в таблице они обозначены коэффициентами  $\Phi_{Mi}^0, \Phi_{Qi}^0, \Phi_{wi}^0, \Phi_{\theta i}^0$ ).

При расчете краевых эффектов в многослойной цилиндрической оболочке общее решение (5.59) упрощается и может быть записано в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}w &+ C_1 \Phi_{w1} + C_2 \Phi_{w2} + \hat{w}; \\ \theta_1 &= C_1 \Phi_{\theta 1} + C_2 \Phi_{\theta 2}; \\ Q_1 &= C_1 \Phi_{Q1} + C_2 \Phi_{Q2}; \\ M_1 &= C_1 \Phi_{M1} + C_2 \Phi_{M2} + \hat{M},\end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

где  $\hat{w}$  и  $\hat{M}$  определяются выражениями (5.60); вид функций решения дается в табл. 5.2; значения функций решения при  $x=0$  приводятся в табл. 5.3.

Вид функции  $\Phi_i$  и их производные

| Функции                    | В случае $k_1^2 < k_2^2$                                                                     | В случае $k_1^2 > k_2^2$         |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\Phi_1$<br>$\Phi_2$       | $e^{-rx} \cos tx$<br>$e^{-rx} \sin tx$                                                       | $e^{-r_1 x}$<br>$e^{-r_2 x}$     |
| $\Phi_1'$<br>$\Phi_2'$     | $-t\Phi_2 - r\Phi_1$<br>$t\Phi_1 - r\Phi_2$                                                  | $-r_1\Phi_1$<br>$-r_2\Phi_2$     |
| $\Phi_1''$<br>$\Phi_2''$   | $(r^2 - t^2)\Phi_1 + 2rt\Phi_2$<br>$(r^2 - t^2)\Phi_2 - 2rt\Phi_1$                           | $r_1^2\Phi_1$<br>$r_2^2\Phi_2$   |
| $\Phi_1'''$<br>$\Phi_2'''$ | $-r(r^2 - 3t^2)\Phi_1 + t(t^2 - 3r^2)\Phi_2$<br>$-r(r^2 - 3t^2)\Phi_2 - t(t^2 - 3r^2)\Phi_1$ | $-r_1^3\Phi_1$<br>$-r_2^3\Phi_2$ |

Таблица 5.2

Функции решений

| Функция                                | При $k_1^2 < k_2^2$                                                                                                                                                                                                                                     | При $k_1^2 > k_2^2$                                                                                                                          |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Phi_{M1}$<br>$\Phi_{M2}$             | $\Phi_1 = e^{-rx} \cos tx$<br>$\Phi_2 = e^{-rx} \sin tx$                                                                                                                                                                                                | $\Phi_1 = e^{-r_1 x}$<br>$\Phi_2 = e^{-r_2 x}$                                                                                               |
| $\Phi_{Q1}$<br>$\Phi_{Q2}$             | $-t\Phi_2 - r\Phi_1$<br>$t\Phi_1 - r\Phi_2$                                                                                                                                                                                                             | $-\Phi_1 r_1$<br>$-\Phi_2 r_2$                                                                                                               |
| $\Phi_{W1}$<br>$\Phi_{W2}$             | $\Phi_1 \left( \frac{r_2^2 - t_2^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}} \right) + \Phi_2 \frac{2rt}{a_{52}}$<br>$-\Phi_1 \frac{2rt}{a_{52}} + \Phi_2 \left( \frac{r^2 - t^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}} \right)$                                       | $\Phi_1 \left( \frac{r_1^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}} \right)$<br>$\Phi_2 \left( \frac{r_2^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}} \right)$ |
| $\Phi_{\theta 1}$<br>$\Phi_{\theta 2}$ | $\Phi_1 r \left( \frac{r^2 - 3t^2}{a_{52}} - a_* \right) -$<br>$-\Phi_2 t \left( \frac{t^2 - 3r^2}{a_{52}} + a_* \right)$<br>$\Phi_1 t \left( \frac{t^2 - 3r^2}{a_{52}} + a_* \right) +$<br>$+ \Phi_2 r \left( \frac{r^2 - 3t^2}{a_{52}} - a_* \right)$ | $\Phi_1 r_1 \left( \frac{r_1^2}{a_{52}} - a_* \right)$<br><br><br><br>$\Phi_2 r_2 \left( \frac{r_2^2}{a_{52}} - a_* \right)$                 |

Значение коэффициентов  $\Phi_{M1}^{\circ}$ ,  $\Phi_{Q1}^{\circ}$ ,  $\Phi_{\omega1}^{\circ}$ ,  $\Phi_{\theta1}^{\circ}$ 

| Коэффициент              | При $k_1^2 < k_2^2$            | При $k_1^2 > k_2^2$       |
|--------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| $\Phi_{M1}^{\circ}$      | 1                              | 1                         |
| $\Phi_{M2}^{\circ}$      | 0                              | 1                         |
| $\Phi_{Q1}^{\circ}$      | $-r$                           | $-r_1$                    |
| $\Phi_{Q2}^{\circ}$      | $t$                            | $-r_2$                    |
| $\Phi_{\omega1}^{\circ}$ | $(r^2 - t^2 - a_{32})/a_{52}$  | $(r_1^2 - a_{32})/a_{52}$ |
| $\Phi_{\omega2}^{\circ}$ | $-2rt/a_{52}$                  | $(r_2^2 - a_{32})/a_{52}$ |
| $\Phi_{\theta1}^{\circ}$ | $r((r^2 - 3t^2)/a_{52} - a_*)$ | $r_1(r_1^2/a_{52} - a_*)$ |
| $\Phi_{\theta2}^{\circ}$ | $t((t^2 - 3r^2)/a_{52} + a_*)$ | $r_2(r_2^2/a_{52} - a_*)$ |

Для определения напряжений в  $i$ -м слое оболочки вычисляются

$$\varepsilon_1 = N/B_x - B_{xy}\omega/(B_x R); \quad \varepsilon_2 = \omega/R;$$

$$\kappa_1 = M_1/D_x - C_{xy}\omega/(D_x R).$$

Далее подсчитываются деформации в  $i$ -м слое

$$\varepsilon_{1[i]} = \varepsilon_1 + z_{[i]}\kappa_1; \quad \varepsilon_{2[i]} = \varepsilon_2,$$

где  $z_{[i]}$  — нормальная координата  $z$  рассматриваемой точки  $i$ -го слоя. Затем осуществляется пересчет деформаций в системе координат, связанной со слоем, и с помощью соотношений упругости определяются искомые напряжения.

Рассмотрим несколько примеров расчета краевых эффектов.

Свободный край (рис. 5.4).

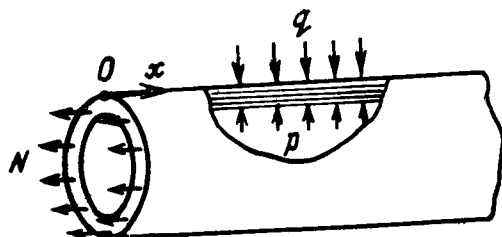


Рис. 5.4. К определению граничных условий свободного края

Граничные условия при  $x=0$ ,  $M_1(0)=0$ ;  $Q_1(0)=0$ , или с учетом (5.66):

$$C_1\Phi_{M1}^0 + C_2\Phi_{M2}^0 = -\dot{M};$$

$$C_1\Phi_{Q1}^0 + C_2\Phi_{Q2}^0 = 0.$$

Решением полученной системы будет

$$C_1 = -\dot{M}\Phi_{Q2}^0/\Delta; \quad C_2 = \dot{M}\Phi_{Q1}^0/\Delta,$$

где

$$\Delta = \Phi_{M1}^0\Phi_{Q2}^0 - \Phi_{Q1}^0\Phi_{M2}^0.$$

Согласно табл. 5.3 получаем:

1. Если параметры оболочки таковы (5.56), что  $k_1^2 < k_2^2$ , тогда

$$\Phi_{M1}^0 = 1; \quad \Phi_{M2}^0 = 0; \quad \Phi_{Q1}^0 = -r; \quad \Phi_{Q2}^0 = t;$$

$$\Delta = t; \quad C_1 = -\dot{M}; \quad C_2 = -\dot{M}r/t,$$

где  $r$  и  $t$  вычисляются согласно (5.57), а  $\dot{M}$  — согласно (5.60).

2. При  $k_1^2 > k_2^2$

$$\Phi_{M1}^0 = 1; \quad \Phi_{M2}^0 = 1; \quad \Phi_{Q1}^0 = -r_1; \quad \Phi_{Q2}^0 = -r_2;$$

$$\Delta = 1 + r_1r_2; \quad C_{1,2} = \pm \dot{M}r_{2,1}/(1 + r_1r_2),$$

где  $r_1, r_2$  — вычисляются согласно (5.58).

Отметим, что для оболочки симметричного строения (при  $C_{xy}=0$ )  $\dot{M}=0$  (5.60) и краевой эффект свободного края отсутствует.

Действие торцевых моментов  $M$  и перерезывающих сил  $Q$  (рис. 5.5).

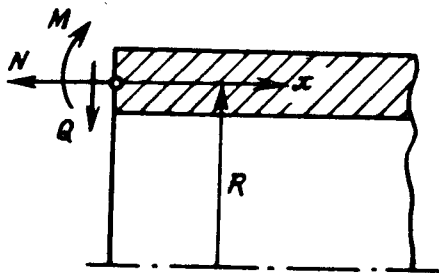


Рис. 5.5. Общий случай осесимметричного нагружения торца цилиндрической оболочки

Граничные условия при  $x=0$   $M_1(0)=M$ ;  $Q_1(0)=Q$ , или

$$C_1\Phi_{M1}^0 + C_2\Phi_{M2}^0 = M - \dot{M};$$

$$C_1\Phi_{Q1}^0 + C_2\Phi_{Q2}^0 = Q.$$

Отсюда

$$C_1 = (M - \dot{M})\Phi_{Q2}^0/\Delta - Q\Phi_{M2}^0/\Delta;$$

$$C_2 = -(M - \dot{M})\Phi_{Q1}^0/\Delta + Q\Phi_{M1}^0/\Delta;$$

где

$$\Delta = \Phi_{M1}^0 \Phi_{Q2}^0 - \Phi_{Q1}^0 \Phi_{M2}^0.$$

Дальнейшая последовательность решения такая же, как в предыдущем примере.

**Подкрепление упругим шпангоутом (рис. 5.6).**

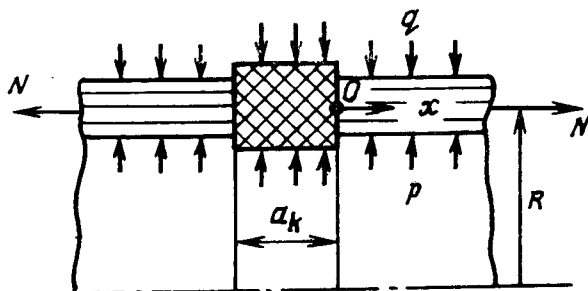


Рис. 5.6. Схема подкрепления цилиндрической оболочки шпангоутом

Граничные условия при  $x=0$   $\theta_1(0)=0$ ;  $w(0)=w_k$ , где  $w_k=R^2(p_3a_k+2Q_1(0))/B_k$  — перемещение шпангоута;  $B_k=Eh_k a_k$  — жесткость шпангоута на растяжение.

С помощью констант  $C_1, C_2$  граничные условия задачи запишутся в виде:

$$C_1 \Phi_{\theta 1}^0 + C_2 \Phi_{\theta 2}^0 = 0;$$

$$C_1 \left( \Phi_{w1}^0 - \frac{2R^2}{B_k} \Phi_{Q1}^0 \right) + C_2 \left( \Phi_{w1}^0 - \frac{2R^2}{B_k} \Phi_{Q2}^0 \right) = \frac{R^2 p_3 a_k}{B_k} - \hat{w}.$$

Решением системы при  $C_{xy}=0$  и  $K_x \rightarrow \infty$  будет [11]:

$$C_1 = - \frac{\hat{w} - p_3 a_k R^2 / B_k}{\frac{2r}{a_{52}} \left( 1 + \frac{8R^2 D_x r^3}{B_k} \right)}; \quad C_2 = -C_1;$$

$$w = \hat{w} - \frac{\hat{w} - p_3 a_k R^2 / B_k}{1 + 8R^2 D_x r^3 / B_k} e^{-rx} (\cos rx + \sin rx).$$

Для анализа краевого эффекта в тонких многослойных цилиндрических оболочках коэффициенты разрешающей системы дифференциальных уравнений упрощаются

$$a_{25}=0; \quad k_1^2 = C_{xy} / (R D_x); \quad k_2^4 = B / (R^2 B_x D_x).$$

В заключение отметим, что разрешающая система дифференциальных уравнений (5.54) может быть сведена к следующему виду [11]:

$$u_1 = \left( N x - \frac{B_{xy}}{R} \int w dx \right) / B_x + \hat{u};$$

$$N_1 = N;$$

$$w'' - 2k_1^2 w'' + k_2^4 w = k_p(x).$$



где

$$k_p(x) = \frac{1}{D_x} \left( p_3 - \frac{B_{xy}}{R} N - \frac{D_x}{K_x} p_3'' \right).$$

### 5.3.4. Устойчивость цилиндрических оболочек

Рассмотрим решение задачи устойчивости многослойной цилиндрической оболочки, свободно опертой по торцам  $x=0$ ,  $x=l$ , находящейся в безмоментном осесимметричном состоянии:

$$N_1^0 = -T; \quad N_2^0 = -qR; \quad N_{21}^0 = N_{21}^0 = 0.$$

Для случая «мертвых» внешних сил воспользуемся следующей вариационной формулировкой задачи:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} (\delta \mathcal{E} \mathcal{N} - \Lambda \delta \omega^T \mathcal{N}_0 \omega) dy dx = 0, \quad (5.67)$$

где

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & qR \end{bmatrix};$$

$$\omega_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R};$$

$\Lambda$  — параметр нагружения. Компоненты вектор-столбцов  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N}$  при расчете толстых многослойных цилиндрических оболочек определяются выражениями (5.40), (5.41). Связь деформаций с перемещениями определяется так же, как и при решении задачи статики выражениями (5.44).

Введем в рассмотрение вектор-столбец обобщенных перемещений  $X$  (5.42). Воспользуемся разложением решений в тригонометрические ряды (5.45) и для  $m, n$ -й гармоники разложения запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mn} &= B_{mn} X_{mn}, \\ \mathcal{N}_{mn} &= \mathcal{D} \mathcal{E}_{mn}, \\ \omega_{mn} &= R_{mn} X_{mn}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

где

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{m}}{\bar{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{m}}{\bar{n}} & 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix}; \quad \bar{m} = \frac{m\pi}{l}; \quad \bar{n} = \frac{n}{R}.$$

Матрица  $B_{mn}$  определена для выражения (5.46); коэффициенты матрицы  $\mathcal{D}$  вычисляются согласно зависимостям (2.17) с учетом нулевой кривизны оболочки в меридиональном направлении.

Воспользовавшись разложением в двойные тригонометрические ряды и выполнив интегрирование (5.67) по переменным  $x$  и  $y$ , можно обнаружить, что относительно отдельных гармоник

разложения система разрешающих уравнений оказывается не-  
связанной. Для отдельной  $m, n$ -й гармоники волнообразования  
можно решать следующую обобщенную задачу на собственные  
значения:

$$(K_{mn} - \Lambda S_{mn}) X_{mn} = 0, \quad (5.69)$$

где

$$K_{mn} = B_{mn}^T \mathcal{D} B_{mn}; \quad S_{mn} = R_{mn}^T N_0 R_{mn}.$$

Матрица  $K_{mn}$  характеризует приведенную жесткость оболоч-  
ки; с помощью матрицы  $S_{mn}$  учитывается начальное напряжен-  
ное состояние оболочки. Нагружение считается пропорциональ-  
ным (параметром нагружения выступает коэффициент  $\Lambda$ ); зна-  
чения начального осевого погонного усилия  $T$  и окружного сжи-  
мающего усилия  $qR$  определяют только направление луча на-  
гружения на плоскости  $N_1^0, N_2^0$ . Значения параметров нагруже-  
ния  $\Lambda = \Lambda_{mn}$ , при которых система (5.69) имеет нетривиальные  
решения, называются собственными значениями. Собственные  
значения  $\Lambda_{mn}$  определяются корнями уравнения  $\det(K_{mn} -$   
 $-\Lambda S_{mn}) = 0$ . Наименьшее из всех собственных значений  $\Lambda_{кр} =$   
 $= \min_{(m,n)} (\Lambda_{mn})$  определяет критическую комбинацию нагрузки  
 $T_{кр} = \Lambda_{кр} T$ ;  $q_{кр} = \Lambda_{кр} q$ . Параметры волнообразования  $m$  и  $n$ ,  
соответствующие критической комбинации нагрузки, характе-  
ризуют форму потери устойчивости.

Рассмотрим случай одноосного осевого сжатия. Для иссле-  
дования осесимметричной формы потери устойчивости положим  
 $n=0, \omega_2=0; u_2=0, \psi_2=0$ . Соответствующая (5.69) обобщенная  
задача на собственные значения будет иметь следующий вид:

$$(K_m - \Lambda S_m) X_m = 0, \quad (5.70)$$

где

$$K_m = B_m^T \mathcal{D} B_m; \quad S_m = R_m^T N_0 R_m;$$

$$X_m = [\omega, \psi_1, u_1]^T;$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{m} \\ 1/R & 0 & 0 \\ \bar{m}^2 & -\bar{m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_m = [-\bar{m} \ 0 \ 0]; \quad N_0 = [T].$$

Матрица приведенных жесткостных характеристик  $\mathcal{D}$  запол-  
няется на основе соотношений упругости для осесимметричного  
состояния (5.53) и имеет структуру

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_x & B_{xy} & 0 & 0 \\ & B_y & C_{xy} & 0 \\ & & D_x & 0 \\ \text{сим.} & & & K_x \end{bmatrix}.$$

После выполнения соответствующих матричных перемножений задачу (5.70) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \Lambda s_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{сим.} & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m \\ \psi_{1m} \\ u_{1m} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.71)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= B_y/R^2 + 2\bar{m}^2 C_{xy}/R + \bar{m}^4 D_x; \\ k_{12} &= -\bar{m} C_{xy}/R - \bar{m}^3 D_x; \quad k_{13} = -\bar{m} B_{xy}/R; \\ k_{22} &= \bar{m}^2 D_x + K_x; \quad k_{33} = \bar{m}^2 B_x; \quad s_{11} = T \bar{m}^2. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя системы (5.71) получим собственное значение параметра нагружения  $\Lambda = \Lambda_m$ . Путем минимизации параметра  $\Lambda_m$  по числу полуволн определим критический параметр нагружения  $\Lambda_{кр} = \min_{(m)} \Lambda_m$  и значение критической погонной сжимающей нагрузки, соответствующей осесимметричной форме потери устойчивости  $T_{кр} = \Lambda_{кр} T$ . В развернутом виде значение  $T_{кр}$  определяется минимизацией следующего выражения:

$$T_{кр} = \min_{(m)} \left\{ \frac{\bar{m}^4 D_x + \frac{\bar{m}^2}{R} \left[ C_{xy} \left( 2 + \frac{C_{xy}}{K_x R} \right) + \frac{B D_x}{B_x K_x R} \right] + \frac{B}{R^2 B_x}}{\bar{m}^2 \left( 1 + \frac{D_x}{K_x} \bar{m}^2 \right)} \right\}, \quad (5.72)$$

где  $\bar{m} = m\pi/l$ ;  $B = B_x B_y - B_{xy}^2$ .

При работе с выражением (5.72) следует помнить, что в качестве координатной поверхности  $z=0$  выбрана поверхность, соответствующая наименьшей изгибной жесткости многослойной оболочки в осевом направлении, и радиус  $R$  представляет радиус этой координатной поверхности.

При расчете тонких оболочек можно пренебречь деформацией поперечного сдвига ( $K_x \rightarrow \infty$ ). Тогда из (5.72) получим

$$T_{кр} = \min_{(m)} \{ \bar{m}^2 D_x + 2C_{xy}/R + B/(\bar{m}^2 R^2 B_x) \}. \quad (5.73)$$

При большом числе полуволн  $m$  выражение (5.73) допускает приближенную минимизацию. Используя условие минимума функции с непрерывным аргументом, получим

$$\begin{aligned} \bar{m}_{кр}^2 &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{B}{B_x D_x}}; \\ T_{кр} &= \frac{2}{R} \left( \sqrt{\frac{B D_x}{B_x}} + C_{xy} \right). \end{aligned}$$

При исследовании неосесимметричной формы потери устойчивости необходимо воспользоваться общей формулировкой

задачи (5.69). Для случая осевого сжатия критическое значение погонной нагрузки  $T_{кр}$  будет определяться на основе минимизации следующего выражения:

$$T_{кр} = \min_{(m,n)} \left\{ \frac{1}{m^2} \left[ k_{11} + \frac{1}{\Delta_{11}} (-k_{12}\Delta_{12} + k_{13}\Delta_{13} - k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15}) \right] \right\}, \quad (5.74)$$

где  $k_{ij}$  — элементы матрицы  $K_{mn}$  (5.69);  $\Delta_{ij}$  — миноры матрицы  $K_{mn}$  (5.69);  $\Delta_{ij}$  — миноры матрицы  $K_{mn}$  в результате вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Для тонких слоистых оболочек, при анализе которых можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине и деформации поперечного сдвига, выражение (5.74) упрощается:

$$T_{кр} = \min_{(m,n)} \left\{ \frac{1}{m^2} \left[ d_{33} - \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right] \right\}, \quad (5.75)$$

где коэффициенты  $d_{ij}$  определены ранее для решения (5.51).

Рассмотрим случай действия бокового внешнего давления (при осевой силе  $T=0$ ). Будем считать, что потеря устойчивости сопровождается появлением системы волн  $m=1$ ,  $n \gg 1$ . Тогда угол поворота нормали  $\omega_2$  можно приближенно определить  $\omega_2 = -\partial w / \partial y$ .

Для толстых многослойных оболочек, расчет которых проводится с учетом изменения метрических характеристик по толщине пакета и с учетом деформаций поперечных сдвигов, получим аналогично (5.74).

$$q_{кр}R = \min_{(m=1,n)} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[ k_{11} + \frac{1}{\Delta_{11}} (-k_{12}\Delta_{12} + k_{13}\Delta_{13} - k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15}) \right] \right\}. \quad (5.76)$$

Для тонких слоистых оболочек, аналогично (5.75)

$$q_{кр}R = \min_{(m=1,n)} \left\{ \frac{1}{n^2} \left( d_{33} - \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right) \right\}. \quad (5.77)$$

Минимизация выражений (5.76), (5.77) выполняется по  $n$  при  $m=1$ .

В случае пропорционального нагружения осевой силой и боковым внешним давлением для определения критического параметра нагружения можно воспользоваться минимизацией следующего выражения:

$$\Lambda_{кр} = \min_{(m,n)} \left\{ \frac{F_{mn}}{Tm^2 + qRn^2} \right\}, \quad (5.78)$$

где для расчета толстых оболочек

$$F_{mn} = k_{11} + (-k_{12}\Delta_{12} + k_{13}\Delta_{13} - k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15}) / \Delta_{11};$$

для расчета тонких оболочек

$$F_{mn} = d_{33} - (d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{23}) / (d_{11}d_{22} - d_{12}^2);$$

$T, q$  — силовые факторы, соответствующие параметру нагружения  $\Lambda=1$ . Критические нагрузки будут вычисляться как

$$T_{кр} = \Lambda_{кр} T; \quad q_{кр} = \Lambda_{кр} q.$$

При выполнении проектных расчетов удовлетворительные оценки критического параметра нагружения можно получить, используя результаты обобщенной полубезмоментной теории [11]

$$\Lambda_{кр} = \min_{\substack{(m,n) \\ (n \geq 2)}} \left\{ \frac{F_{mn}}{T \bar{m}^2 + q R (\bar{n}^2 - 1/R^2)} \right\},$$

где

$$F_{mn} = D_m \bar{m}^2 + \frac{D_n}{R^2} (\bar{n}^2 - 1) + \frac{\bar{m}^4}{n^2 (\bar{n}^2/B_x + \bar{m}^2/B_{33})};$$

$$D_m = \frac{D_x}{1 + \bar{m}^2 D_x / K_x}; \quad D_n = \frac{D_y (\bar{n}^2 - 1)}{R^2 (1 + \bar{n}^2 D_y / K_y)};$$

$$D_x = D_{11} - C_{11}^2 / B_{11}; \quad D_y = D_{22} - C_{22}^2 / B_{22}; \quad B_x = B_{11}.$$

При  $B_{33} \rightarrow \infty$ ;  $K_y \rightarrow \infty$ ,  $T=0$ ;  $m=\pi/l$ , используя минимизацию по  $n$ , получим для оболочек средней длины

$$n_{кр}^2 = \frac{\pi R}{l} \sqrt[4]{\frac{3B_x R^2}{D_y}}; \quad q_{кр} \approx 5,5 \frac{B_x^{1/4} D_y^{3/4}}{l R \sqrt{R}}. \quad (5.79)$$

Приведенные жесткости  $B_x$ ,  $D_x$ ,  $D_y$  приближенно учитывают несимметричность в расположении слоев по толщине. Жесткостями стенки при кручении, растяжимостью контура, а также эффектами Пуассона пренебрегают. Полученное значение  $q_{кр}$  для изотропных оболочек средней длины соответствует критическому давлению, вычисленному по формуле Папковича [см. I].

### 5.3.5. Подпрограмма вычисления критических значений осевого сжатия и внешнего давления

Воспользуемся алгоритмом расчета критических нагрузок для толстых многослойных цилиндрических оболочек, рассмотренным в разд. 5.3.2. В общем случае совместного действия осевого сжатия и внешнего давления структура матрицы разрешающей системы алгебраических уравнений (5.69) имеет следующий вид:

$$(K_{mn} - \Lambda S_{mn}) = \begin{bmatrix} (k_{11} - \Lambda s_{11}) & k_{12} & k_{13} & k_{14} & (k_{15} - \Lambda s_{15}) \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & & k_{44} & k_{45} \\ \text{СИМ.} & & & & (k_{55} - \Lambda s_{55}) \end{bmatrix}.$$

где  $s_{11} = T\bar{m}^2 + qR\bar{n}^2$ ;  $s_{15} = -q\bar{n}$ ;  $s_{55} = q/R$ .

Для определения наименьшего корня характеристического уравнения  $\det(K_{mn} - \Lambda S_{mn}) = 0$  в подпрограмме используется итерационный процесс:

$$\Lambda_i = d_0 (\Lambda_{i-1}) / d_1 (\Lambda_{i-1}),$$

$$d_0 (\Lambda_{i-1}) = \det \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & (k_{15} - \Lambda_{i-1} s_{15}) \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & & k_{44} & k_{45} \\ \text{СИМ.} & & & & (k_{55} - \Lambda_{i-1} s_{55}) \end{bmatrix};$$

$$d_1 (\Lambda_{i-1}) = s_{11} \det \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & k_{44} & k_{45} \\ \text{СИМ.} & & & (k_{55} - \Lambda_{i-1} s_{55}) \end{bmatrix}.$$

В качестве исходных данных примем:

KSL; CC(7, KSL); H(KSL); F(KSL); E — даны в описании исходных данных подпрограммы DKSL (пример 2.2); R — радиус координатной поверхности цилиндрической оболочки; DL — длина цилиндрической оболочки; M1, M2 — целые числа, определяющие диапазон изменения числа полуволн  $m$  в осевом направлении при поиске критической нагрузки; N1, N2 — целые числа, определяющие диапазон изменения числа волн  $n$  в окружном направлении при поиске критической нагрузки; T, Q — начальные значения погонной осевой сжимающей силы  $T$  и внешнего давления  $q$  (определяют направление луча нагружения в плоскости  $(Toq)$ , соответствуют параметру нагружения  $\Lambda = 1$ ).

В результате работы подпрограммы CILCR получаем:

TCR — значение критической осевой сжимающей силы  $T_{кр}$ ; QCR — значение критического давления  $q_{кр}$ ; MCR, NCR — значения чисел  $m_{кр}$ ,  $n_{кр}$ , соответствующих потери устойчивости для заданного нагружения.

Подпрограмма CILCR использует подпрограммы DKSL (пример 2.2), MUM, MTM, DETMN (Приложение 2).

Текст подпрограммы CILCR

```
SUBROUTINE CILCR(KSL, CC, H, F, E, R, DL,
* T, Q, M1, M2, N1, N2, TCR, QCR, MCR, NCR)
DIMENSION CC(7, KSL), H(KSL), F(KSL), D(10,10),
* B(10,5), BD(10,5), STR(5,5), ST4(5,5), S(5,5)
RK2=1./R
CALL DKSL(0., RK2, KSL, CC, H, F, E, D)
HH=0.
DO 1 I=1, KSL
  HH=HH+H(I)
  QQ=(1.+(HH-E)/R)*Q
  QR=QQ*R
  S55=QQ/R
  DO 2 I=1,10
    DO 2 J=1,5
      B(I,J)=0.
      B(2,1)=RK2
      B(9,2)=1.
```

```

B(10,3)=1.
N0=N1
NK=N2
IN=0
IF(N1.NE.0) GO TO 3
N0=1
NK=N2+1
IN=1
3 IK=0
EPS=0.001
DO 11 M=M1, M2
AM=3.1416*M/DL
B(5,1)=AM*AM
B(5,2)=-AM
B(7,3)=AM
B(1,4)=-AM
B(3,5)=AM
B(7,5)=AM*RK2
DO 11 NN=N0, NK
N=NN-IN
AN=N*RK2
B(6,1)=AN*AN
B(7,1)=AM*AN
B(8,1)=B(7,1)
B(8,2)=-AN
B(6,3)=AN
B(4,4)=-AN
B(2,5)=AN
B(6,5)=AN*RK2
CALL MTM(B, D, BD, 10, 5, 10)
CALL MUM(BD, B, STR, 5, 10, 5)
S11=T*AM*AM+QR*AN*AN
S15=-QQ*AN
P=0.
6 S15P=S15*P
S55P=S55*P
DO 4 I=1,5
DO 4 J=1,5
4 S(I, J)=STR(I, J)
S(1,5)=S(1,5)+S15P
S(5,1)=S(1,5)
S(5,5)=S(5,5)+S55P
DO 5 I=1,4
I1=I+1
DO 5 J=1,4
J1=J+1
5 ST4(I, J1)=S(I1, J1)
CALL DETMN(ST4, 4, D1)
CALL DETMN(S, 5, D0)
D1=S11*D1
CRR=D0/D1
IF(P.NE.0.) GO TO 7
P=CRR
GO TO 6
7 EPSS=ABS((CRR-P)/CRR)
IF(EPSS.LE.EPS) GO TO 8
P=CRR
GO TO 6
8 CRMN=CRR
IF(IK.EQ.0) CR=CRMN

```

```

IK=1
AMN=ABS(CRMN)
ACR=ABS(CR)
IF(ACR-AMN) 9, 10, 10
10 CR=CRMN
MCR=M
NCR=N
9 CONTINUE
11 CONTINUE
TCR=T*CR
QCR=Q*CR
RETURN
END

```

#### 5.4. УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С КОЛЬЦЕВЫМИ ПОДКРЕПЛЯЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В многослойных оболочечных конструкциях при стыковке отдельных элементов, а также в ряде случаев для создания дополнительной жесткости применяют подкрепляющие силовые элементы. Ниже приводится описание деформирования и условия сопряжения с многослойными оболочками вращения кольцевых подкрепляющих элементов (шпангоутов).

Рассмотрим замкнутое круговое кольцо. Введем для него местную систему координат  $t, \beta, r$  (рис. 5.7), центр которой

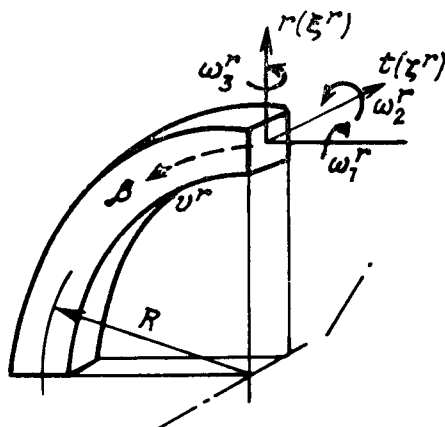


Рис. 5.7. Система координат для кругового кольца

поместим в центре тяжести сечения кольца. При выводе основных соотношений воспользуемся гипотезой плоских сечений, согласно которой пренебрегают деформациями в плоскости поперечного сечения кольца и деформациями сечений. В этом слу-



чае распределение радиальных ( $\xi$ ), касательных ( $v$ ) и осевых ( $\zeta$ ) перемещений по сечению кольца можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^r - t\omega_1^r; \\ v &= v^r + t\omega_3^r + r\omega_2^r; \\ \zeta &= \zeta^r + r\omega_1^r,\end{aligned}\tag{5.80}$$

где  $\xi^r$ ,  $v^r$ ,  $\zeta^r$  — соответственно радиальное, касательное и осевое перемещения центра тяжести сечения кольца, положительные направления которых совпадают с направлениями координатных осей  $r$ ,  $\beta$ ,  $t$ ;  $\omega_1^r$  — угол поворота кольца вокруг центра тяжести сечения (угол закручивания);  $\omega_2^r$ ,  $\omega_3^r$  — углы поворота сечений кольца вокруг осей  $t$ ,  $r$  соответственно. Здесь и в дальнейшем индекс  $r$  будет указывать на принадлежность к кольцу. Согласно кинематическим гипотезам углы поворота  $\omega_2^r$  и  $\omega_3^r$  определяются через перемещения следующим образом:

$$\omega_2^r = -\frac{1}{R} \frac{d\xi^r}{d\beta} + \frac{1}{R} v^r; \quad \omega_3^r = -\frac{1}{R} \frac{d\zeta^r}{d\beta},\tag{5.81}$$

где  $R$  — радиус окружности, на которой лежат центры тяжести сечений кольца.

Окружную деформацию кольцевой линии с координатами  $t$ ,  $r$  запишем через перемещения и углы поворота линии центров тяжести сечений

$$e_2 = \varepsilon_2^r + r\kappa_1 + t\kappa_3^r + \frac{1}{2}(\omega_2^r)^2 + \frac{1}{2}(\omega_3^r)^2,\tag{5.82}$$

где  $\varepsilon_2^r = \frac{1}{R} \frac{dv^r}{d\beta} + \frac{\xi^r}{R}$  — окружная линейная деформация линии центров тяжести сечений.

Изменения кривизн в плоскости кольца и из плоскости кольца  $\kappa_1^r$ ,  $\kappa_3^r$  определяются следующими выражениями:

$$\kappa_1^r = \frac{1}{R} \frac{d\omega_2^r}{d\beta}; \quad \kappa_3^r = \frac{1}{R} \frac{d\omega_3^r}{d\beta} - \frac{\omega_1^r}{R}.\tag{5.83}$$

Нелинейную составляющую окружной деформации будем определять лишь квадратами углов поворота нормали (подчеркнутые слагаемые в выражении (5.82)).

Будем считать, что деформация сдвига в плоскости сечения кольца, связанная с кручением, распределена в сечении по закону

$$\gamma^r = b(t, r) \chi^r,\tag{5.84}$$

где

$$\chi^r = \frac{1}{R} \frac{d\omega_1^r}{d\beta} + \frac{1}{R} \omega_3^r\tag{5.85}$$

— относительный угол закручивания;  $b$  — функция кручения, определяющая закон распределения сдвиговых деформаций и зависящая от формы сечения.

При выводе основных соотношений воспользуемся матричной символикой. Введем в рассмотрение вектор-столбец обобщенных перемещений кольца. В качестве компонент этого вектора примем радиальное, касательное и осевое смещения линии центров тяжести сечений, а также угол закручивания

$$\mathbf{X}_r = [\xi^r, v^r, \zeta^r, \omega_1^r]^T. \quad (5.86)$$

Учитывая разложения решений в тригонометрические ряды по угловой координате  $\beta$ , распределение перемещений в сечении кольца (5.80) представим в виде

$$\mathbf{v}_r = \Phi_r \mathbf{X}_r, \quad (5.87)$$

где

$$\mathbf{v}_r = [\xi, v, \zeta]^T; \\ \Phi_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t \\ \bar{n} & 1 + r/R & \bar{t}\bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \end{bmatrix}; \quad \bar{n} = n/R;$$

$n$  — номер гармоники разложения. Индекс  $n$ , указывающий на принадлежность к  $n$ -й гармонике разложения, будем опускать.

Углы поворота  $\omega_2^r, \omega_3^r$  (5.81) выразим через компоненты обобщенных перемещений кольца следующим образом:

$$\omega_r = \mathbf{R}_r \mathbf{X}_r, \quad (5.88)$$

где

$$\omega_r = [\omega_2^r, \omega_3^r]^T; \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \bar{n} & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для линейных составляющих деформаций кольца (5.82) — (5.85) связь с обобщенными перемещениями с учетом разложения в тригонометрические ряды по угловой координате  $\beta$  в матричной форме запишется в виде

$$\varepsilon_r = \mathbf{B}_r \mathbf{X}_r, \quad (5.89)$$

где

$$\varepsilon_r = [\varepsilon^r_2, \gamma^r]^T \\ \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} (1/R + \bar{n}^2 r) & (\bar{n} + r n/R) & \bar{t}\bar{n}^2 - t/R \\ 0 & 0 & b\bar{n}/R - b\bar{n} \end{bmatrix}.$$

После того, как полностью установлена кинематика деформирования кольцевого подкрепления, приступим к формулировке условий сопряжения. Для простоты вначале рассмотрим стыковку одного оболочечного элемента со шпангоутом. На

рис. 5.8 условно показан узел сопряжения многослойной оболочки вращения со шпангоутом. Номера узловых линий примыкающего элемента оболочки при  $\alpha_1 = \alpha_{(1)}$  и  $\alpha_1 = \alpha_{(2)}$  обозначены  $i$  и  $j$  соответственно.

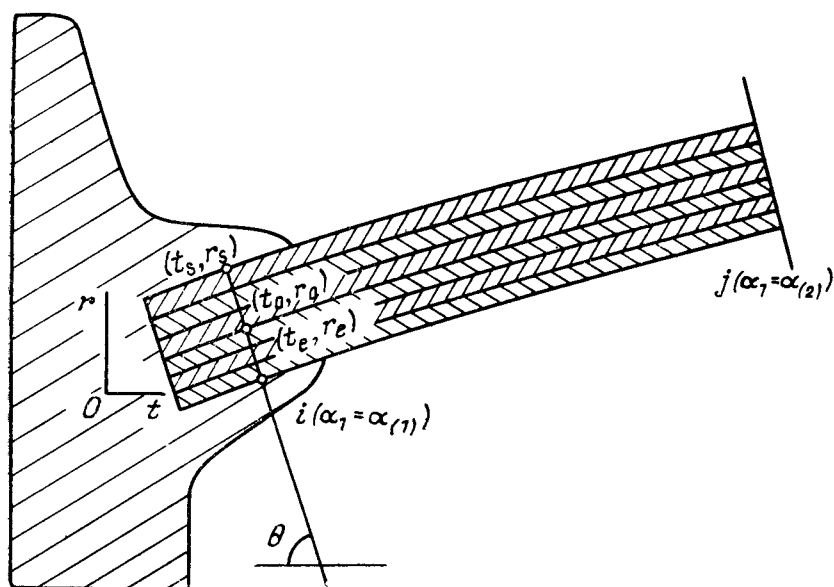


Рис. 5.8. Сопряжение многослойной оболочки со шпангоутом

При формулировке геометрических граничных условий будем считать, что перемещения оболочки в сечении  $\alpha_1 = \alpha_{(1)}$  однозначно определяются перемещениями и углами поворота шпангоута. Воспользовавшись рис. 5.9 и тем обстоятельством, что

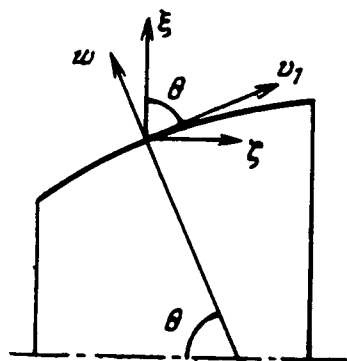


Рис. 5.9. К определению связи нормальных и касательных перемещений с радиальными и осевыми перемещениями

$$v_1 = \xi \cos \theta + \zeta \sin \theta;$$

$$v_2 = v;$$

$$\omega = \xi \sin \theta - \zeta \cos \theta,$$

запишем условия равенства перемещений оболочки и шпангоута в точке с координатами  $(t_0, r_0)$

$$u_1 = \xi_0 \cos \theta + \zeta_0 \sin \theta;$$

$$u_2 = v_0; \quad (5.90)$$

$$\omega = \xi_0 \sin \theta - \zeta_0 \cos \theta,$$

где  $\xi_0 = \xi(t_0, r_0)$ ;  $v_0 = v(t_0, r_0)$ ;  $\zeta_0 = \zeta(t_0, r_0)$ . В свою очередь, перемещения  $\xi_0, v_0, \zeta_0$  согласно (5.87) можно выразить через компоненты вектора  $X_r$

$$\xi_0 = \xi^r - t_0 \omega_1;$$

$$v_0 = r_0 \bar{n} \xi^r + (1 + r_0/R) v^r + t_0 \bar{n} \zeta^r; \quad (5.91)$$

$$\zeta_0 = \zeta^r + r_0 \omega_1.$$

Углы поворота  $\theta_1, \theta_2$  нормальных линий в сопрягаемом сечении оболочки выразим следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{v_1^s - v_1^e}{h}; \quad \theta_2 = \frac{v_2^s - v_2^e}{h}, \quad (5.92)$$

где

$$v_1^s = \xi_s^w \cos \theta + \zeta_s \sin \theta, \quad (s, e);$$

$$v_2^s = v_s, \quad (s, e);$$

$h$  — толщина оболочки в сечении сопряжения; перемещения  $\xi_s, \zeta_s, v_s$  и  $\xi_e, \zeta_e, v_e$  определяются соотношениями, аналогичными (5.91) при замене  $t_0, r_0$  на  $t_s, r_s$  и  $t_e, r_e$  соответственно. С учетом сделанных замечаний, а также, принимая во внимание, что  $(r_s - r_e) \sin \theta - (t_s - t_e) \cos \theta = h$ , геометрические условия сопряжения (5.90), (5.92) можно представить так:

$$X_{(i)} = Q_{(i)} X_r, \quad (5.93)$$

где

$$X_{(i)} = [u_1, u_2, \omega, \theta_1, \theta_2]^T_{(i)}; \quad X_r = [\xi^r, v^r, \zeta^r, \omega_1^r]^T;$$

$$Q_{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & -t_0 \cos \theta + r_0 \sin \theta \\ \bar{n} r_0 & 1 + r_0/R & \bar{n} t_0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta & -t_0 \sin \theta - r_0 \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{n} (r_s - r_e) / h & (r_s - r_e) / hR & \bar{n} (t_s - t_e) / h & 0 \end{bmatrix};$$

$t_k, r_k$  ( $k=0, e, s$ ) — координаты  $t$  и  $r$  точек сопряжения (рис. 5.8).

Полученное матричное уравнение (5.93), представляющее геометрические условия сопряжения, показывает, что обобщенные перемещения в  $i$ -м сечении многослойной оболочки  $X_{(i)}$  однозначно выражаются через обобщенные перемещения шпангоута  $X_r$ .

Силовые граничные условия будут представлять уравнения равновесия шпангоута, на который кроме внешних сил  $P_r$  действуют реакции многослойной оболочки. Получим эти уравнения с использованием принципа возможных перемещений. При этом будем считать, что для  $n$ -й гармоники разложения известна матрица жесткости и вектор-столбец приведенных узловых сил конечного элемента многослойной оболочки, которые вычисляются по стандартным процедурам интегрирования канонической системы дифференциальных уравнений статики и последующих преобразований (разд. 5.1.6). Для узла конструкции, содержащего шпангоут и примыкающий элемент оболочки, согласно принципу возможных перемещений для равновесного состояния будем иметь

$$\delta X_r^T (K_r X_r - P_r) + \delta q^T (K q - P - t) = 0, \quad (5.94)$$

где

$$K_r = R \int_{A_r} B_r^T C_r B_r dA; \quad (5.95)$$

$$C_r = [E_2, G];$$

$$q = [X_{(i)}^T, X_{(j)}^T]^T;$$

$$P = [P_{(i)}^T, P_{(j)}^T]^T; \quad t = [0, t_{(j)}]^T;$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $A_r$  — площадь поперечного сечения шпангоута;  $dA = dt dr$ ;  $E_2$  — модуль на растяжение в окружном направлении;  $G$  — модуль сдвига в плоскости поперечного сечения шпангоута (в общем случае модули  $E_2, G$  считаются известными функциями аргументов  $t, r$ );  $t_{(j)}$  — вектор-столбец реакций отброшенной части оболочки;  $K_r$  — матрица жесткости шпангоута, в развернутом виде ее коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$K_r = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{сим.} & & & k_{44} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= B/R + \bar{n}^4 D_r R + 2\bar{n}^2 C_r; \\
k_{12} &= \bar{n}B + \bar{n}^3 D_r + (\bar{n}/R + \bar{n}^3 R) C_r; \\
k_{13} &= \bar{n}^2 C_t + \bar{n}^4 D_{rt} R; \quad k_{14} = C_t/R + \bar{n}^2 D_{rt}; \\
k_{22} &= \bar{n}^2 BR + \bar{n}^2 D_r/R + 2\bar{n}^2 C_r; \\
k_{23} &= \bar{n}^3 C_t R + \bar{n}^3 D_{rt}; \quad k_{24} = \bar{n}C_t + \bar{n}D_{rt}/R; \\
k_{33} &= \bar{n}^4 D_t R + \bar{n}^2 D_k/R; \quad k_{34} = -\bar{n}^2 D_t - \bar{n}^2 D_k; \\
k_{44} &= D_t/R + \bar{n}^2 D_k R.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B &= \int_{A_r} E_2 r dA; \quad C_r = \int_{A_r} E_2 r dA, \quad (r, t); \\
D_r &= \int_{A_r} E_2 r^2 dA, \quad (r, t); \quad D_{rt} = \int_{A_r} E_2 r t dA; \\
D_k &= \int_{A_r} G b^2 dA.
\end{aligned}$$

Для изотропного материала шпангоута выражения приведенных жесткостных характеристик упрощаются:

$$\begin{aligned}
B &= E_2 A_r; \quad C_r = C_t = 0; \quad D_r = E_2 I_r, \quad (r, t); \\
D_{rt} &= E_2 I_{rt}; \quad D_k = G I_k,
\end{aligned}$$

где

$$I_r = \int_{A_r} r^2 dA \quad (r, t); \quad I_{rt} = \int_{A_r} r t dA;$$

$I_k$  — приведенный момент инерции на кручение.

Вектор-столбец внешних сил, действующих на шпангоут  $P_r = R[p_r, p_\theta, p_t, m]^T$ , содержит амплитудные значения гармоник разложения погонных радиальных, окружных и осевых нагрузок и момента, выкручивающего шпангоут из плоскости.

Принимая во внимание геометрические условия сопряжения (5.93), показывающие, что на обобщенные перемещения в месте стыковки многослойной оболочки со шпангоутом наложены дополнительные связи, перейдем в конечном элементе оболочки к новым обобщенным перемещениям

$$q = T_{(i)} q^*; \quad \delta q = T_{(i)} \delta q^*, \quad (5.96)$$

где

$$T_{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{(i)} & 0 \\ 0 & E_{(5 \times 5)} \end{bmatrix}; \quad q^* = [X_r^T, X_{(j)}^T]^T.$$

Преобразование (5.96) устанавливает тот факт, что для узловой окружности ( $i$ ) многослойной оболочки ее обобщенные перемещения однозначно определяются обобщенными перемещениями шпангоута, в то время как для узловой окружности ( $j$ ) обобщенные перемещения многослойной оболочки остаются без изменения ( $E_{(5 \times 5)}$  — единичная матрица).

Подставим (5.96) в условие равновесия (5.94), матрицу жесткости многослойного элемента и вектор-столбец приведенных сил преобразуем к следующему виду:

$$K^* = T_{(i)}^T K T_{(i)}; \quad (5.97)$$

$$P^* = T_{(i)}^T P \quad (5.98)$$

или в блочном представлении с учетом структуры матрицы  $T_{(i)}$ :

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{ii}^* & K_{ij}^* \\ K_{ji}^* & K_{jj}^* \end{bmatrix}; \quad P^* = [P_{(i)}^T, P_{(j)}^T]^T;$$

$$K_{ii}^* = Q_{(i)}^T K_{ii} Q_{(i)}; \quad K_{ij}^* = Q_{(i)}^T K_{ij};$$

$$K_{ji}^* = K_{ij}^{*T}; \quad P_{(i)}^* = Q_{(i)}^T P_{(i)}.$$

Раскрыв скалярные произведения в условии (5.94) с учетом (5.97) — (5.98), получим искомое матричное уравнение равновесия шпангоута:

$$(K_r + K_{ii}^*) X_r + K_{ij}^* X_j = P_r + P_{(i)}^*.$$

Таким образом, при решении задач с помощью МКЭ (вариант перемещений) стыковку многослойной оболочки со шпангоутом формально можно рассматривать как сопряжение элементов, у которых имеются различные узловые обобщенные перемещения. Причем на перемещения примыкающего сечения многослойной оболочки накладываются дополнительные кинематические условия (5.93), в соответствии с которыми перестраиваются матрица жесткости элемента (5.97) и вектор-столбец приведенных узловых сил (5.98).

При решении задач устойчивости и колебаний для дополнительных перемещений геометрические условия сопряжения остаются такими же, как и при решении задачи статики (5.93), поэтому для многослойного конечного элемента его матрица приведенных начальных напряжений и матрица приведенных масс преобразуется таким же образом, как и матрица жесткости элемента, т. е. с использованием соотношений, аналогичных (5.97). Для задач устойчивости и колебаний вариационная формулировка условия равновесия и колебаний вариационная формула выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \delta X_r^T (K_r + \Lambda S_r - \omega^2 M_r) X_r + \\ & + \delta q^T (K + \Lambda S - \omega^2 M) q - \delta q^T t = 0, \end{aligned} \quad (5.99)$$

где

$$\mathbf{S}_r = R N_0 \mathbf{R}_r' \mathbf{R}_r; \quad N_0 = \int_{A_r} \sigma_0 r dA;$$

$$\mathbf{M}_r = R \int_{A_r} \rho_r \Phi_r^T \Phi_r dA.$$

Здесь  $N_0$  — начальная окружная сила в шпангоуте;  $\rho$  — удельная плотность материала шпангоута. С помощью матрицы  $\mathbf{S}_r$  для  $n$ -й гармоники волнообразования учитывается начальное осесимметричное напряженное состояние, а с помощью матрицы  $\mathbf{M}_r$  — приведенные инерционные характеристики шпангоута.

Из вариационного уравнения (5.99) для узла конструкции (рис. 5.8) с учетом условия геометрической стыковки (5.93) получим следующее однородное матричное уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_{ii}^*) + \Lambda (\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ii}^*) - \omega^2 (\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ii}^*)) \mathbf{X}_r + \\ & + (\mathbf{K}_{ij}^* + \Lambda \mathbf{S}_{ij}^* - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}^*) \mathbf{X}_{(j)} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{S}_{ii}^* = \mathbf{Q}_{(i)}^T \mathbf{S}_{ii} \mathbf{Q}_{(i)}; \quad \mathbf{M}_{ii}^* = \mathbf{Q}_{(i)}^T \mathbf{M}_{ii} \mathbf{Q}_{(i)};$$

$$\mathbf{S}_{ij}^* = \mathbf{Q}_{(i)}^T \mathbf{S}_{ij}; \quad \mathbf{M}_{ij}^* = \mathbf{Q}_{(i)}^T \mathbf{M}_{ij}$$

— преобразованные блоки матриц приведенных начальных напряжений и приведенных масс элемента многослойной оболочки.

## 5.5. ТРЕУГОЛЬНЫЙ ШЕСТИУЗЛОВОЙ КОНЕЧНЫЙ ОБОЛОЧЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ СМЕШАННОГО ТИПА

Рассмотрим многослойную оболочку общего вида, закрепленную в пространстве, ограниченную произвольным гладким контуром и нагруженную системой внешних консервативных сил. Стационарное температурное поле оболочки будем считать известным. Свяжем с оболочкой систему ортогональных криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$ . Оболочку будем считать достаточно тонкой, чтобы изменение по толщине коэффициентов первой квадратной формы не учитывать.

На параметрической плоскости  $(\alpha_1, \alpha_2)$  (рис. 5.10) выделим область определения координатной поверхности рассматриваемой оболочки и выполним разбивку этой области на треугольные конечные элементы. Вариационная формулировка сме-



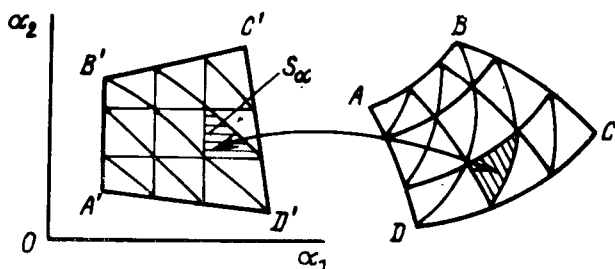


Рис. 5.10. Разбивка поверхности оболочки на треугольные элементы

шанного типа для конечного элемента многослойной оболочки будет выглядеть аналогично (4.41), (4.42)

$$\iint_{S_\alpha} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathcal{D} \mathcal{E} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - f(\delta\mathbf{u}) = 0; \quad (5.100)$$

$$\iint_{S_\alpha} \delta \mathcal{E}^T \mathcal{D} (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathcal{E}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0, \quad (5.101)$$

где

$$f(\delta\mathbf{u}) = \iint_{S_\alpha} (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} + (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T \mathcal{N}_T) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \int_{\Gamma_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathcal{N}} d\Gamma; \quad (5.102)$$

$S_\alpha$  — площадь треугольного элемента на параметрической плоскости  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор-столбец обобщенных перемещений;  $\mathcal{E}$  — вектор-столбец обобщенных деформаций;  $\mathbf{L}$  — матрица операторов деформационных соотношений;  $\mathcal{D}$  — матрица приведенных жесткостных характеристик;  $\mathbf{p}$  — вектор-столбец поверхностных нагрузок;  $\mathcal{N}_T$  — вектор-столбец температурных составляющих внутренних силовых факторов;  $\bar{\mathcal{N}}$  — вектор-столбец распределенных реакций от соседних элементов;  $\Gamma_\sigma$  — граница контура конечного элемента.

Для модели деформирования многослойной оболочки, учитывающей деформации поперечных сдвигов, в качестве компонент вектор-столбца обобщенных перемещений  $\mathbf{u}$  выступают:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, w, \theta_1, \theta_2]^T, \quad (5.103)$$

Деформационные соотношения (без учета изменения матричных характеристик по толщине оболочки) согласно (2.91), (2.92) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1(z)} &= \varepsilon_1 + z\kappa_1, \quad (1, 2); \\ \gamma_{12(z)} &= \gamma_{12} + z\chi_{12}; \\ \gamma_{31(z)} &= \psi_1, \quad (1, 2), \end{aligned} \quad (5.104)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} u_{1,1} + \varphi_{12} u_2 + k_1 w, \quad (1, 2); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \theta_{1,1} + \varphi_{12} \theta_2, \quad (1, 2); \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{A_1} u_{2,1} - \varphi_{12} u_1 + \frac{1}{A_2} u_{1,2} - \varphi_{21} u_2; \\ \chi_{12} &= \frac{1}{A_1} \theta_{2,1} - \varphi_{12} \theta_1 + \frac{1}{A_2} \theta_{1,2} - \varphi_{21} \theta_2.\end{aligned}\quad (5.105)$$

Согласно (5.104), (5.105) в качестве вектор-столбца обобщенных деформаций  $\mathcal{E}$  примем

$$\mathcal{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \chi_{12}, \psi_1, \psi_2]^T. \quad (5.106)$$

Деформационные соотношения (5.105) с учетом (5.103) представим в виде  $\mathcal{E} = \mathbf{L} \mathbf{u}$ , где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \nabla_1 & \varphi_{12} & k_1 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & \nabla_2 & k_2 & 0 & 0 \\ \nabla_2 - \varphi_{12} & \nabla_1 - \varphi_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1 & \varphi_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{21} & \nabla_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_2 - \varphi_{12} & \nabla_1 - \varphi_{21} \\ -k_1 & 0 & \nabla_1 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & \nabla_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5.107)$$

$$\nabla_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad (1, 2); \quad \varphi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (1, 2).$$

Структура матрицы приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета  $\mathcal{D}$  соответствует (4.40). Вектор-столбец температурных составляющих внутренних силовых факторов  $\mathcal{N}_T$  в общем случае имеет следующие компоненты:

$$\mathcal{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, N_{12T}, M_{1T}, M_{2T}, M_{12T}, Q_{1T}, Q_{2T}]^T. \quad (5.108)$$

При аппроксимации на конечном элементе перемещений  $\mathbf{u}$  и деформаций  $\mathcal{E}$  в виде

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q}; \quad (5.109)$$

$$\mathcal{E} = \omega \alpha \quad (5.110)$$

из вариационных уравнений (5.100), (5.101) можно установить связь между узловыми реакциями  $\mathbf{t}$  и узловыми обобщенными перемещениями  $\mathbf{q}$  (4.45)–(4.49)  $\mathbf{t} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}$ , где

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G};$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \iint_{S_a} \omega^T \mathcal{D} B A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \quad H = \iint_{S_a} \omega^T \mathcal{D} \omega A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2; \\ B &= L\Phi; \quad P = \iint_{S_a} \Phi^T p + B^T N_{\tau} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.111)$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся отличий от конечного элемента пологой оболочки (разд. 4.4). Для шестиугольного треугольного конечного элемента (рис. 4.4) в качестве узловых обобщенных перемещений примем компоненты вектор-столбца  $q$  (4.50), (4.51). Матрица функций формы  $\Phi$  соответствует (4.52), (4.53), где под естественными координатами  $L_i$  вместо (4.54) следует понимать

$$L_i = \frac{1}{2S_a} (a_{(i)} + b_{(i)}\alpha_1 + c_{(i)}\alpha_2), \quad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$a_{(1)} = \alpha_{1(2)}\alpha_{2(3)} - \alpha_{1(3)}\alpha_{2(2)}, \quad (1, 2, 3);$$

$$b_{(1)} = \alpha_{2(2)} - \alpha_{2(3)}, \quad (1, 2, 3);$$

$$c_{(1)} = \alpha_{1(3)} - \alpha_{1(2)}, \quad (1, 2, 3);$$

$$2S_a = b_{(1)}c_{(2)} - b_{(2)}c_{(1)};$$

(5.112)

$\alpha_{1(i)}, \alpha_{2(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — координаты  $\alpha_1, \alpha_2$  вершин треугольника на параметрической плоскости ( $\alpha_1, \alpha_2$ ).

Структура матрицы деформационных соотношений ( $B = L\Phi$ ) остается такой же, как (4.56), но компоненты в блоках (4.57) будут определяться следующими выражениями:

$$b_{11(i)} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{i,1} & \phi_{12}\phi_i & k_1\phi_i \\ \phi_{21}\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} & k_2\phi_i \\ \bar{\phi}_{i,2} - \phi_{12}\phi_i & \bar{\phi}_{i,1} - \phi_{21}\phi_i & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_{22(i)} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{i,1} & \phi_{12}\phi_i \\ \phi_{21}\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} \\ \bar{\phi}_{i,2} - \phi_{12}\phi_i & \bar{\phi}_{i,1} - \phi_{21}\phi_i \end{bmatrix};$$

$$b_{31(i)} = \begin{bmatrix} -k_1\phi_i & 0 & \bar{\phi}_{i,1} \\ 0 & -k_2\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} \end{bmatrix}; \quad b_{32(i)} = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix},$$

где

$$\bar{\phi}_{i,1} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_1}, \quad (1, 2).$$

При вычислении производных  $\phi_{i,1}, \phi_{i,2}$  в соотношениях (4.58) необходимо вместо  $S$  подставить  $S_a$  и для  $b_{(i)}, c_{(i)}$  воспользоваться выражениями (5.112).

Для вектор-столбца приведенных узловых сил  $\mathbf{P}$  (4.64) температурные составляющие  $\mathbf{P}_{T(i)}$  для  $\mathcal{M}_T$  (5.108) будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{P}_{T(i)} = \iint_{S_\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11}^T(i) & 0 & \mathbf{b}_{31}^T(i) \\ 0 & \mathbf{b}_{22}^T(i) & \mathbf{b}_{32}^T(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_T \\ \mathbf{M}_T \\ \mathbf{Q}_T \end{bmatrix} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

где

$$\mathbf{N}_T = [N_{1T}, N_{2T}, N_{12T}]^T; \quad \mathbf{M}_T = [M_{1T}, M_{2T}, M_{12T}]^T;$$

$$\mathbf{Q}_T = [Q_{1T}, Q_{2T}]^T.$$

Для интегрирования (5.111) по треугольной области  $S_\alpha$  удобно пользоваться квадратурными формулами и подпрограммой KSIW3 (приложение 1). При достаточно мелкой разбивке оболочки на конечные элементы геометрические характеристики координатной поверхности в пределах отдельного элемента можно считать постоянными. При составлении подпрограммы конечного элемента можно взять за основу подпрограмму STPAN (разд. 4.4.2), в которую следует внести добавления, соответствующие сделанным выше замечаниям.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## ПОДПРОГРАММЫ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

При вычислении одномерных интегралов удобно пользоваться квадратурными формулами Гаусса:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=1}^n W_k f(x_k), \quad (\text{П1.1})$$

где

$$W_k = \frac{l}{2} V_k; \quad x_k = \frac{a+b}{2} + \xi_k \frac{l}{2}; \quad l = b - a;$$

$n$  — число точек, в которых вычисляются значения подынтегральной функции;  $x_k$  — значение аргумента  $x$  в  $k$ -й точке Гаусса;  $W_k$  — весовой коэффициент квадратурной формулы (П1.1). В табл. П1.1 приводятся значения  $\xi_k$  и  $V_k$  для квадратурных формул при  $n=1, 2, 3, 4, 5$ .

Таблица П1.1

Значения аргументов  $\xi_k$  и весовых коэффициентов  $V_k$  для квадратурных формул Гаусса

| $n$ | $\xi_k$     | $V_k$     |
|-----|-------------|-----------|
| 1   | $\xi_1 = 0$ | $V_1 = 2$ |

| $n$ | $\xi_k$                                                                                                                             | $V_k$                                                                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2   | $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$<br>$\xi_2 = -\xi_1$                                                                                           | $V_1 = 1$<br>$V_2 = 1$                                                                                                  |
| 3   | $\xi_1 = -\sqrt{3/5}$<br>$\xi_2 = 0$<br>$\xi_3 = -\xi_1$                                                                            | $V_1 = 5/9$<br>$V_2 = 8/9$<br>$V_3 = V_1$                                                                               |
| 4   | $\xi_1 = -\sqrt{((15+2\sqrt{30})/35)}$<br>$\xi_2 = -\sqrt{((15-2\sqrt{30})/35)}$<br>$\xi_3 = -\xi_2$<br>$\xi_4 = -\xi_1$            | $V_1 = 49/(6(18+\sqrt{30}))$<br>$V_2 = 49/(6(18-\sqrt{30}))$<br>$V_3 = V_2$<br>$V_4 = V_1$                              |
| 5   | $\xi_1 = -\sqrt{(35+2\sqrt{70})/63}$<br>$\xi_2 = -\sqrt{(35-2\sqrt{70})/63}$<br>$\xi_3 = 0$<br>$\xi_4 = -\xi_2$<br>$\xi_5 = -\xi_1$ | $V_1 = 5103/(50(322+3\sqrt{70}))$<br>$V_2 = 5103/(50(322-3\sqrt{70}))$<br>$V_3 = 128/225$<br>$V_4 = V_2$<br>$V_5 = V_1$ |

Отметим, что квадратурная формула (П1.1) является точной для полиномов степени  $2n-1$ . Например, при  $n=4$  вычисления по формуле (П1.1) будут точными, если  $f(x)$  представляет собой любой полином седьмой степени.

Составим подпрограмму вычисления весовых коэффициентов и значений аргумента в точках интегрирования для квадратурной формулы Гаусса (П1.1).

В качестве исходных данных будут выступать:

$N$  — число точек интегрирования ( $n(N \leq 5)$ );  $A, B$  — пределы интегрирования  $a, b$ .

В результате работы подпрограммы KSIW1 получим:

$W(5)$  — массив,  $k$ -й коэффициент которого содержит весовой коэффициент  $W_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),  $X(5)$  — массив, содержащий значения аргументов  $x_k$ .

Текст подпрограммы KSIW1

```

SUBROUTINE KSIW1 (N, A, B, W, X)
  DIMENSION W(5), X(5)
  DO 10 I=1,5
    X(I)=0.
  10 W(I)=0.
  GO TO (1, 2, 3, 4, 5), N
  1 X(1)=0.
    W(1)=2.
    GO TO 20
  2 X(1)=-1./SQRT(3.)
    X(2)=-X(1)
    W(1)=1.
    W(2)=1.
    GO TO 20
  3 X(1)=-SQRT(0.6)
    X(2)=0.
    X(3)=-X(1)
    W(1)=5./9.

```

```

W(2)=8./9.
W(3)=W(1)
GO TO 20
4 X(1)=-SQRT((15.+2.*SQRT(30.))/35.)
X(2)=-SQRT((15.-2.*SQRT(30.))/35.)
X(3)=-X(2)
X(4)=-X(1)
W(1)=49./(6.*(18.+SQRT(30.)))
W(2)=49./(6.*(18.-SQRT(30.)))
W(3)=W(2)
W(4)=W(1)
GO TO 20
5 S=SQRT(70.)
X(1)=-SQRT((35.+2.*S)/63.)
X(2)=-SQRT((35.-2.*S)/63.)
X(3)=0.
X(4)=-X(2)
X(5)=-X(1)
W(1)=5103./(50.*(322.+13.*S))
W(2)=5103./(50.*(322.-13.*S))
W(3)=128./225.
W(4)=W(2)
W(5)=W(1)
20 DL2=0.5*(B-A)
DO 30 I=1,5
W(I)=W(I)*DL2
30 X(I)=0.5*(A+B)+X(I)*DL2
RETURN
END

```

При вычислении двумерных интегралов на треугольных областях квадратурные формулы имеют следующий вид:

$$\int_S f(x, y) dx dy \simeq \sum_{k=1}^n W_k f(x_k, y_k), \quad (\text{П}1.2)$$

где

$$W_k = SV_k;$$

$$x_k = x_{(1)}\xi_k + x_{(2)}\eta_k + x_{(3)}(1 - \xi_k - \eta_k), \quad (x, y);$$

$$S = \frac{1}{2} (x_{(13)}y_{(23)} - x_{(23)}y_{(13)});$$

$$x_{(13)} = x_{(1)} - x_{(3)}, \quad (1, 2);$$

$$y_{(13)} = y_{(1)} - y_{(3)}, \quad (1, 2),$$

$S$  — площадь треугольника;  $n$  — число точек, в которых вычисляются значения подынтегральной функции;  $x_k, y_k$  — значения переменных  $x, y$  в  $k$ -й точке Гаусса;  $W_k$  — весовой коэффициент квадратурной формулы (П1.2);  $x_{(i)}, y_{(i)}$  — координаты  $x, y$ ,  $i$ -й вершины треугольника ( $i=1, 2, 3$ ). Нумерация вершин треугольника проводится против часовой стрелки. В табл. П1.2

Значения аргументов  $\xi_k$ ,  $\eta_k$  и весовых коэффициентов  $V_k$  в квадратурных формулах для треугольной области

| $n$<br>( $p$ ) | $\xi_k$                                                                                                                                                                         | $\eta_k$                                                                                                                                 | $V_k$                                                                                                                               |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 (1)          | $\xi_1 = 1/3$                                                                                                                                                                   | $\eta_1 = \xi_1$                                                                                                                         | $V_1 = 1$                                                                                                                           |
| 3 (2)          | $\xi_1 = 1/6$<br>$\xi_2 = 2/3$<br>$\xi_3 = \xi_1$                                                                                                                               | $\eta_1 = \xi_1$<br>$\eta_2 = \xi_1$<br>$\eta_3 = \xi_2$                                                                                 | $V_1 = 1/3$<br>$V_2 = V_1$<br>$V_3 = V_1$                                                                                           |
| 4 (3)          | $\xi_1 = 1/3$<br>$\xi_2 = 1/5$<br>$\xi_3 = 3/5$<br>$\xi_4 = \xi_2$                                                                                                              | $\eta_1 = \xi_1$<br>$\eta_2 = \xi_2$<br>$\eta_3 = \xi_2$<br>$\eta_4 = \xi_3$                                                             | $V_1 = -27/48$<br>$V_2 = 25/48$<br>$V_3 = V_2$<br>$V_4 = V_2$                                                                       |
| 6 (4)          | $\xi_1 = 0,091576213509771$<br>$\xi_2 = 0,816847572980459$<br>$\xi_3 = \xi_1$<br>$\xi_4 = 0,445948490915965$<br>$\xi_5 = 0,108103018168070$<br>$\xi_6 = \xi_4$                  | $\eta_1 = \xi_1$<br>$\eta_2 = \xi_1$<br>$\eta_3 = \xi_2$<br>$\eta_4 = \xi_4$<br>$\eta_5 = \xi_4$<br>$\eta_6 = \xi_5$                     | $V_1 = 0,109951743655322$<br>$V_2 = V_1$<br>$V_3 = V_1$<br>$V_4 = 0,223381589678011$<br>$V_5 = V_4$<br>$V_6 = V_4$                  |
| 7 (5)          | $\xi_1 = 1/3$<br>$\xi_2 = 0,101286507323456$<br>$\xi_3 = 0,797426985353087$<br>$\xi_4 = \xi_2$<br>$\xi_5 = 0,470142064105115$<br>$\xi_6 = 0,059715871789770$<br>$\xi_7 = \xi_5$ | $\eta_1 = \xi_1$<br>$\eta_2 = \xi_2$<br>$\eta_3 = \xi_2$<br>$\eta_4 = \xi_3$<br>$\eta_5 = \xi_5$<br>$\eta_6 = \xi_5$<br>$\eta_7 = \xi_6$ | $V_1 = 0,225$<br>$V_2 = 0,125939180544827$<br>$V_3 = V_2$<br>$V_4 = V_2$<br>$V_5 = 0,132394152788506$<br>$V_6 = V_5$<br>$V_7 = V_5$ |

приводятся значения коэффициентов  $\xi_k$ ,  $\eta_k$ ,  $V_k$  для различных  $n$ .

В первой колонке в скобках указана максимальная степень полинома, для которого данная схема квадратурной формулы дает точный результат (в пределах точности ЭВМ).

Составим подпрограмму вычисления весовых коэффициентов и значений аргументов в точках интегрирования для квадратурной формулы (П1.2).

В качестве исходных данных будут выступать:

$N$  — число точек интегрирования ( $n$ );  $N=1, 3, 4, 6, 7$  (для  $N=2$  и  $N=5$  делается переприсвоение  $N=1$  и  $N=4$ );  $XT(3, 2)$  — массив координат вершин треугольника. В  $i$ -й строке массива последовательно размещаются координаты  $i$ -й вершины  $XT(I, 1) = x_{(i)}$ ;  $XT(I, 2) = y_{(i)}$ .

В результате работы подпрограммы KSIW3 получим:

$W(7)$  — массив,  $k$ -й коэффициент которого содержит весовой коэффициент  $W(K) = W_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) (для заданного  $n$ );  $XY(7, 2)$  — массив, в  $k$ -й строке которого содержится значения координат в  $k$ -й точке интегрирования  $XY(K, 1) = x_k$ ,  $XY(K, 2) = y_k$  (для заданного  $n$ ).

Текст подпрограммы KSIW3

SUBROUTINE KSIW3 (N, XT, W, XY)

DIMENSION XT(3,2), W(7), XY(7,2), X(7), Y(7)

```

DO 10 I=1,7
W(I)=0.
DO 10 J=1,2
10 XY(I, J)=0.
GO TO (1, 1, 3, 4, 4, 6, 7), N
1 N=1
X(1)=1./3.
Y(1)=X(1)
W(1)=1.
GO TO 8
3 X(1)=1./6.
X(2)=2./3.
X(3)=X(1)
Y(1)=X(1)
Y(2)=X(1)
Y(3)=X(2)
W(1)=1./3.
W(2)=W(1)
W(3)=W(1)
GO TO 8
4 N=4
X(1)=1./3.
X(2)=1./5.
X(3)=3./5.
X(4)=X(2)
Y(1)=X(1)
Y(2)=X(2)
Y(3)=X(2)
Y(4)=X(3)
W(1)=-27./48.
W(2)=25./48.
W(3)=W(2)
W(4)=W(2)
GO TO 8
6 X(1)=0.091576
X(2)=0.816848
X(3)=X(1)
X(4)=0.445948
X(5)=0.108103
X(6)=X(4)
Y(1)=X(1)
Y(2)=X(1)
Y(3)=X(2)
Y(4)=X(4)
Y(5)=X(4)
Y(6)=X(5)
W(1)=0.109951
W(2)=W(1)
W(3)=W(1)
W(4)=0.223382
W(5)=W(4)
W(6)=W(4)
GO TO 8
7 X(1)=1./3.
X(2)=0.101286
X(3)=0.797426
X(4)=X(2)
X(5)=0.470142
X(6)=0.059716
X(7)=X(5)

```



```

Y(1)=X(1)
Y(2)=X(2)
Y(3)=X(2)
Y(4)=X(3)
Y(5)=X(5)
Y(6)=X(5)
Y(7)=X(6)
W(1)=0.225
W(2)=0.125939
W(3)=W(2)
W(4)=W(2)
W(5)=0.132394
W(6)=W(5)
W(7)=W(5)
8 CONTINUE
X13=XT(1,1)-XT(3,1)
Y13=XT(1,2)-XT(3,2)
X23=XT(2,1)-XT(3,1)
Y23=XT(2,2)-XT(3,2)
S=0.5*(X13*Y23-X23*Y13)
DO 9 K=1, N
  XY(K, 1)=XT(1,1)*X(K)+XT(2,1)*Y(K)+
  * XT(3,1)*(1.-X(K)-Y(K))
  XY(K, 2)=XT(1,2)*X(K)+XT(2,2)*Y(K)+
  * XT(3,2)*(1.-X(K)-Y(K))
9 W(K)=S*W(K)
RETURN
END

```

При вычислении двумерных интегралов на четырехугольных областях можно воспользоваться следующей квадратурной формулой:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} f(x_{kl}, y_{kl}), \quad (\text{П.3})$$

где

$$\begin{aligned}
 W_{kl} &= (I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21}) V_k V_l; \\
 I_{11} &= \frac{1}{4} [(1 - \xi_l)(x_{(2)} - x_{(1)}) + (1 + \xi_l)(x_{(3)} - x_{(4)})]; \\
 I_{12} &= \frac{1}{4} [(1 - \xi_l)(y_{(2)} - y_{(1)}) + (1 + \xi_l)(y_{(3)} - y_{(4)})]; \\
 I_{21} &= \frac{1}{4} [(1 - \xi_k)(x_{(4)} - x_{(1)}) + (1 + \xi_k)(x_{(3)} - x_{(2)})]; \\
 I_{22} &= \frac{1}{4} [(1 - \xi_k)(y_{(4)} - y_{(1)}) + (1 + \xi_k)(y_{(3)} - y_{(2)})]; \\
 x_{kl} &= \frac{1}{4} [(1 - \xi_k)(1 - \xi_l)x_{(1)} + (1 + \xi_k)(1 - \xi_l)x_{(2)} + \\
 &\quad + (1 + \xi_k)(1 + \xi_l)x_{(3)} + (1 - \xi_k)(1 + \xi_l)x_{(4)}], \quad (x, y);
 \end{aligned}$$

$S$  — площадь четырехугольника;  $\xi_k, \xi_l$  и  $V_k, V_l$  ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ) — значения аргументов и весовых коэффициентов для квадратурных формул (П.1) (табл. П.1);  $x_{(i)}, y_{(i)}$  — координаты  $x, y$   $i$ -й вершины четырехугольника. Нумерация вершин проводится против часовой стрелки.

Составим подпрограмму вычисления весовых коэффициентов  $W_{kl}$  и значений аргументов  $x_{kl}$ ,  $y_{kl}$  в точках интегрирования для квадратурной формулы (П1.3).

В качестве исходных данных примем:

$N$  — число точек интегрирования ( $n$ ) вдоль стороны четырехугольника ( $N \leq 5$ ). Суммарное число точек интегрирования равно  $n^2$  ( $\leq 25$ );  $XQ(4,2)$  — массив координат вершин четырехугольника. В  $i$ -й строке последовательно размещены координаты  $x_{(i)}$ ,  $y_{(i)}$ .

В результате работы подпрограммы KSIW4 получим:

$W(5,5)$  — массив весовых коэффициентов  $W_{kl}$ ;  $X(5,5)$  — массив значений аргументов  $x_{kl}$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ );  $Y(5,5)$  — массив значений аргументов  $y_{kl}$  ( $k, l=1, 2, \dots, n$ ). При работе используется подпрограмма KSIW1.

Текст подпрограммы KSIW4

```
SUBROUTINE KSIW4 (N, XQ, W, X, Y)
  DIMENSION XQ(4,2), W(5,5), X(5,5),
  * Y(5,5), XX(5), WW(5)
  A=-1.
  B=1.
  CALL KSIW1 (N, A, B, WW, XX)
  DO 1 I=1,5
  DO 1 J=1,5
    W(I,J)=0.
    X(I,J)=0.
  1 Y(I,J)=0.
  DO 2 K=1, N
    XK=XX(K)
    DO 2 L=1, N
      XL=XX(L)
      EP=1.+XL
      EM=1.-XL
      XP=1.+XK
      XM=1.-XK
      X(K,L)=0.25*(XM*EM*XQ(1,1)+XP*EM*XQ(2,1)+
      * XP*EP*XQ(3,1)+XM*EP*XQ(4,1))
      Y(K,L)=0.25*(XM*EM*XQ(1,2)+XP*EM*XQ(2,2)+
      * XP*EP*XQ(3,2)+XM*EP*XQ(4,2))
      A11=0.25*(EM*(XQ(2,1)-XQ(1,1))+EP*(XQ(3,1)-XQ(4,1)))
      A12=0.25*(EM*(XQ(2,2)-XQ(1,2))+EP*(XQ(3,2)-XQ(4,2)))
      A21=0.25*(XM*(XQ(4,1)-XQ(1,1))+XP*(XQ(3,1)-XQ(2,1)))
      A22=0.25*(XM*(XQ(4,2)-XQ(1,2))+XP*(XQ(3,2)-XQ(2,2)))
      W(K,L)=WW(K)*WW(L)*(A11*A22-A12*A21)
  2 CONTINUE
  RETURN
  END
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ПОДПРОГРАММЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

**Подпрограмма MUM** выполняет умножение матрицы на матрицу ( $C = A \cdot B$ ). Размерности матриц:  $A(M, N)$ ,  $B(N, L)$ ,  $C(M, L)$ .

Исходные данные:

$A$  — матрица первого сомножителя;  $B$  — матрица второго сомножителя;  $M, N, L$  — целые числа, определяющие размерности матриц.

В результате работы подпрограммы MUM в массиве  $C$  будут располагаться коэффициенты матрицы  $C$  (размещение коэффициентов идет по столбцам).

**Замечание.** В вызывающей программе матрицы  $A, B, C$  могут быть описаны как двумерные массивы. Подпрограмма MUM работает с одномерными массивами, что сокращает число операций индексации.

Текст подпрограммы MUM

```
SUBROUTINE MUM (A, B, C, M, N, L)
DIMENSION A(1), B(1), C(1)
DO 1 I=1, M
IM=I-M
JN=-N
IJ=IM
DO 1 J=1, L
IJ=IJ+M
JN=JN+N
IK=IM
D=0.
DO 2 K=1, N
IK=IK+M
KJ=JN+K
2 D=D+A(IK)*B(KJ)
1 C(IJ)=D
RETURN
END
```

Подпрограмма MTM выполняет умножение транспонированной матрицы на матрицу  $C=A^T B$ . Размерности матриц:  $A(M, N)$ ,  $B(M, L)$ ,  $C(N, L)$ .

Исходные данные:

$A$  — матрица первого сомножителя;  $B$  — матрица второго сомножителя;  $M, N, L$  — целые числа, определяющие размерности матриц.

В результате работы подпрограммы MTM в массиве  $C$  будут располагаться коэффициенты матрицы  $C$  (размещение коэффициентов идет по столбцам).

Текст подпрограммы MTM

```
SUBROUTINE MTM (A, B, C, M, N, L)
DIMENSION A(1), B(1), C(1)
II=-M
DO 1 I=1, N
IJ=I-N
II=II+M
JJ=-M
DO 1 J=1, L
IJ=IJ+N
JJ=JJ+M
D=0.
DO 2 K=1, M
KI=II+K
KJ=JJ+K
2 D=D+A(KI)*B(KJ)
1 C(IJ)=D
RETURN
END
```

Подпрограмма SKM выполняет умножение матрицы на скаляр.

Исходные данные:

$A(M, N)$  — исходная и результирующая матрица;  $S$  — скалярная величина;  $M, N$  — целые числа, определяющие размер матрицы  $A$ .

Текст подпрограммы SKM

```
SUBROUTINE SKM (A, S, M, N)
DIMENSION A(1)
MN=M*N
DO 1 I=1, MN
1 A(I)=A(I)*S
RETURN
END
```

Подпрограмма MMT выполняет умножение матрицы на матрицу транспонированную ( $C=AB^T$ ). Размерности матриц  $A(M, N)$ ;  $B(L, N)$ ;  $C(M, L)$ .

Исходные данные:

A — матрица первого сомножителя; B — матрица второго сомножителя; M, N, L — целые числа, определяющие размерности матриц.

В результате работы подпрограммы MMT в массиве C будут располагаться коэффициенты матрицы C (размещение коэффициентов идет по столбцам).

Текст подпрограммы MMT

```
SUBROUTINE MMT (A, B, C, M, N, L)
  DIMENSION A(1), B(1), C(1)
  DO 1 I=1, M
    IJ=I-M
    II=IJ
    DO 1 J=1, L
      IJ=IJ+M
      IK=II
      JK=J-L
      D=0.
      DO 2 K=1, N
        IK=IK+M
        JK=JK+L
        2 D=D+A(IK)*B(JK)
      1 C(IJ)=D
      RETURN
    END
```

Подпрограмма GAUSS решает линейную систему алгебраических уравнений  $AX=B$  методом Гаусса.

Исходные данные:

A(M, M) — массив коэффициентов матрицы системы алгебраических уравнений; B(M) — массив коэффициентов вектор-столбца правых частей; M — целое число, определяющее размерности массивов, равно числу уравнений и числу неизвестных.

В результате работы подпрограммы GAUSS в массиве X(M) будут последовательно располагаться коэффициенты вектор-столбца решений.

Текст подпрограммы GAUSS

```
SUBROUTINE GAUSS (A, B, X, M)
  DIMENSION A(M, M), B(M), X(M)
  M1=M-1
  DO 1 I=1, M1
    J1=I+1
    DO 2 J=J1, M
      F=A(J, I)/A(I, I)
      B(J)=B(J)-B(I)*F
      DO 3 K=1, M
        3 A(J, K)=A(J, K)-A(I, K)*F
      2 CONTINUE
    1 CONTINUE
    X(M)=B(M)/A(M, M)
    DO 4 I=1, M1
      IX=M-I
      J1=IX+1
      DO 5 J=J1, M
        5 B(IX)=B(IX)-A(IX, J)*X(J)
      X(IX)=B(IX)/A(IX, IX)
    4 CONTINUE
    RETURN
  END
```

Подпрограмма DETMN выполняет вычисление определителя матрицы методом Гаусса.

Исходные данные: A(M, M) — исходная матрица; M — размерность матрицы.

В результате работы подпрограммы DETMN переменная DET равна определителю матрицы.

Текст подпрограммы DETMN

```
SUBROUTINE DETMN (A, M, DET)
  DIMENSION A(M, M)
  M1=M-1
  DO 1 I=1, M1
    J1=I+1
    DO 2 J=J1, M
      F=A(J, I)/A(I, I)
      DO 3 K=1, M
3    A(J, K)=A(J, K)-A(I, K)*F
2    CONTINUE
1    CONTINUE
    DET=1.
    DO 4 I=1, M
4    DET=DET*A(I, I)
    RETURN
  END
```

Подпрограмма MATIN выполняет обращение матрицы методом Гаусса без выбора главного элемента.

Исходные данные:

A(N, N) — массив коэффициентов исходной матрицы (после работы не сохраняется); N — целое положительное число, определяющее размерность матрицы.

В результате работы подпрограммы MATIN в массиве E(N, N) располагаются коэффициенты обратной матрицы ( $E=A^{-1}$ ).

Текст подпрограммы MATIN

```
SUBROUTINE MATIN (A, E, N)
  DIMENSION A(N, N), E(N, N)
  DO 11 I=1, N
    DO 10 J=1, N
10    E(I, J)=0.
11    E(I, I)=1.
    DO 27 I=1, N
      J=I
      L=I
      LD=0
12    IF(ABS(A(I, J))) 16, 13, 16
13    LD=1
      IF(L=N) 15, 14, 14
14    CONTINUE
      WRITE(*, 100)
      GOTO 27
15    L=L+1
      GOTO 12
16    IF(LD=1) 26, 17, 26
17    DO 18 K=L, N
      T=A(L, K)
      A(L, K)=A(I, K)
      A(I, K)=T
      T=E(L, K)
      E(L, K)=E(I, K)
18    E(I, K)=T
26    BM=1./A(I, I)
      DO 19 K=L, N
19    E(I, K)=E(I, K)*BM
      I1=I+1
      DO 20 KI=I1, N
      K=N+I1-KI
```

```

20 A(I, K) = A(I, K) * BM
   DO 23 L = 1, N
   IF (L.EQ.I) GOTO 23
   BM = A(L, I)
   DO 21 K = 1, N
21 E(L, K) = E(L, K) - E(I, K) * BM
   I1 = I + 1
   DO 22 K1 = I1, N
   K = N + I1 - K1
22 A(L, K) = A(L, K) - A(I, K) * BM
23 CONTINUE
27 CONTINUE
100 FORMAT (5X, «сбой при обращении матрицы»)
   RETURN
   END

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### ПРОЦЕДУРЫ ФОРМИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МКЭ

Для пояснения процедур формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений МКЭ рассмотрим трактовку МКЭ, соответствующую методу перемещений при решении задач теории упругости. Будем считать, что конечные элементы взаимодействуют лишь в узловых точках. Мысленно выделим отдельные конечные элементы и в узловых точках приложим реакции отброшенных частей. В пределах конечных элементов, используя аппроксимации перемещений, получим уравнения равновесия элементов и определим связи реакций с обобщенными перемещениями узлов элементов и внешними нагрузками. Далее соединим в узлах элементы и запишем условия равновесия отдельных узлов. Для этого приравняем нулю для каждого узла сумму сил реакций от отдельных элементов, примыкающих к рассматриваемому узлу. Полученная система алгебраических уравнений позволит определить неизвестные узловые обобщенные перемещения, через которые в дальнейшем можно вычислить деформации и напряжения в элементах.

Для численной реализации рассмотренной выше процедуры формирования разрешающей системы условно представим конструкцию в виде набора конечных элементов простой формы. Присвоим номера всем конечным элементам. Обойдем все узлы и пронумеруем по порядку все обобщенные перемещения в узлах или узловые степени свободы. Такую нумерацию обобщенных перемещений будем называть глобальной.

Рассмотрим отдельный элемент с номером  $e$ . В заранее установленной последовательности обхода для элементов данного типа обойдем все узлы элемента и пронумеруем по порядку, начиная с единицы, все обобщенные перемещения в узлах элемента. Такую нумерацию степеней свободы назовем локальной.

Пусть общее число узловых обобщенных перемещений в конечном элементе будет  $n$ . Из сказанного выше следует, что для отдельного конечного элемента имеются два набора из  $n$  целых чисел, соответствующих локальной и глобальной нумерациям обобщенных перемещений. Условие их представим в виде следующих упорядоченных массивов номеров или индексных массивов:

$$n^e = [1, 2, 3, \dots, k, \dots, n]; \quad (ПЗ.1)$$

$$N^e = [N_1^e, N_2^e, N_3^e, \dots, N_k^e, \dots, N_n^e].$$

где  $N_k^e$  — целое число, равное номеру степени свободы в глобальной нумерации и соответствующее степени свободы с номером  $k$  в локальной нумерации для элемента  $e$ . На рис. ПЗ.1, а, ПЗ.2, а для конечных элементов про-

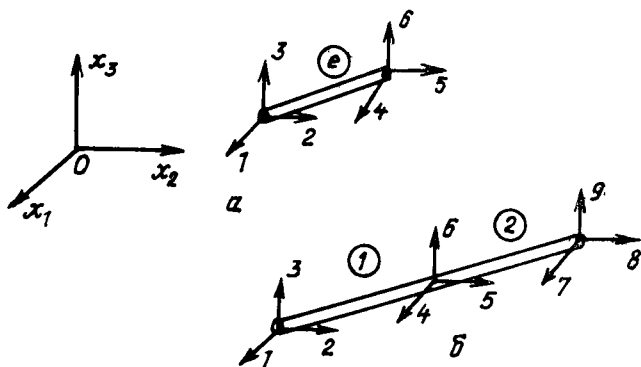


Рис. ПЗ.1 Нумерация обобщенных степеней свободы стержневых конечных элементов: а — локальная нумерация; б — глобальная нумерация

странственной фермы и пластины (для плоской задачи) показаны нумерации степеней свободы в локальных системах координат. На рис. ПЗ.1, б, ПЗ.2, б показаны нумерации степеней свободы в глобальных системах ко-

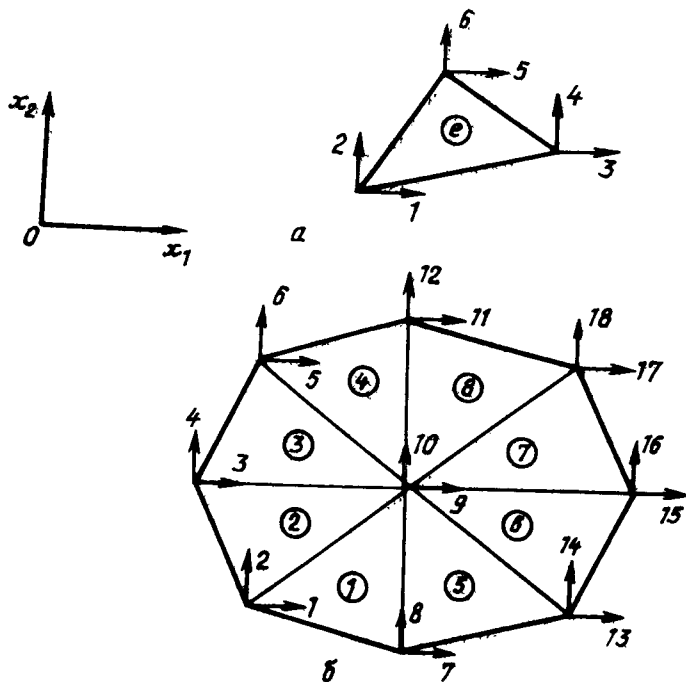


Рис. ПЗ.2. Нумерация обобщенных степеней свободы треугольных элементов для плоской задачи теории упругости: а — локальная нумерация; б — глобальная нумерация

ординат. Для плоской задачи рис. ПЗ.2, 6 индексный массив глобальной нумерации степеней свободы для первого элемента будет содержать следующие номера  $N^1 = [1, 2, 7, 8, 9, 10]$ ; для восьмого элемента —  $N^8 = [9, 10, 17, 18, 11, 12]$ .

Отметим, что для элементов, имеющих общие узлы, в индексных массивах глобальной нумерации номера степеней свободы, принадлежащие общим узлам, равны. В дальнейшем индексными массивами будем пользоваться при записи уравнений равновесия узлов.

После обработки всех элементов и установления связей векторов реакций с перемещениями ( $t^e = K^e q^e - P^e$ , где  $t^e$  — вектор-столбец реакций;  $K^e$  — матрица жесткости;  $q^e$  — вектор-столбец узловых обобщенных перемещений;  $P^e$  — вектор-столбец приведенных узловых сил;  $e$  — номер конечного элемента) можно приступить к составлению уравнений равновесия узлов конструкции. В каждом узле сумма вкладов реакций от отдельных элементов, окружающих узел, должна равняться нулю. Причем должна равняться нулю любая составляющая обобщенных суммарных реакций, направление которой соответствует направлению обобщенного перемещения. Для обобщенного перемещения с номером  $i$  (в глобальной нумерации) приравняем нулю соответствующую составляющую суммы реакций от окружающих данный узел элементов:

$$\sum_e t_k^e = 0, \quad e = (e | i = N_k^e). \quad (\text{ПЗ.2})$$

Здесь указано, что суммирование идет по тем элементам, которые в индексных массивах глобальной нумерации степеней свободы, т. е. в массивах  $N^e$ , содержат номер  $i$ . Для получения разрешающей системы уравнение (ПЗ.2) записывается через перемещения для  $i = 1, 2, \dots, N$  ( $N$  — суммарное число незапрещенных степеней свободы в рассматриваемой конструкции).

$$\sum_{e=(e|i=N_k^e)} \sum_{s=1}^n k_{ks} q_j = \sum_{e=(e|i=N_k^e)} p_k^e. \quad (\text{ПЗ.3})$$

где  $j = N_s^e$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Полученная матрица коэффициентов системы носит название глобальной матрицы жесткости, или матрицы жесткости конструкции (МЖК).

При реализации расчета на ЭВМ формирование МЖК с помощью индексных массивов выполняется достаточно просто и наглядно. После обработки отдельного конечного элемента, т. е. после получения его матрицы жесткости  $K^e$  и вектора приведенных узловых сил  $P^e$ , сразу же можно производить рассылку этих коэффициентов в матрицу жесткости конструкции и в вектор узловых сил (вектор-столбец свободных членов в правой части). Для коэффициента матрицы жесткости конечного элемента, находящегося в  $k$ -й строке и  $s$ -м столбце, вычисляются с использованием выражения (ПЗ.1) номер строки и номер столбца в матрице жесткости конструкции:  $i = N_k^e$ ;  $j = N_s^e$ . По этому адресу ( $i, j$ ) в МЖК отсылается коэффициент  $k_{ke}$ , где производится суммирование с находящимся там числом. Для  $k$ -го коэффициента вектора приведенных узловых сил  $p_k^e$  вычисляется только номер строки  $i = N_k^e$  и также производится отсылка и суммирование. Например, для элемента с номером 1 (рис. ПЗ.2, б) на рис. ПЗ.3 представлена структура его матрицы жесткости. Коэффициент матрицы жесткости элемента, находящийся в третьей строке и четвертом столбце, т. е.  $k_{34}$  (отмечен точкой на рис. ПЗ.3) будет направлен в седьмую строку и восьмой столбец МЖК (на рис. ПЗ.3 номера даны в рамке). Рассмотренный выше прием формирования разрешающей системы называется поэлементным. Рассылку коэффициентов матриц жесткости элементов и векторов приведенных узловых сил согласно глобальной нумерации следует рассматривать как формирование уравнений равновесия узлов, принадлежащих рассматриваемому элементу.



Рассмотрим задание граничных условий. Поскольку уравнения (П3.3) представляют уравнения равновесия, то силовые граничные условия формируются автоматически. Из геометрических условий рассмотрим лишь простейший случай, когда запрещены в граничных узловых точках некоторые

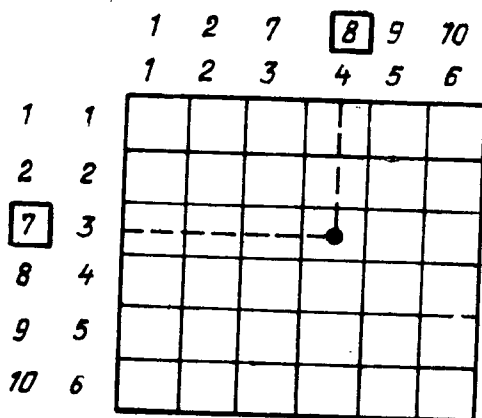


Рис. П3.3. К определению адресов рассылки коэффициентов матриц жесткости

обобщенные перемещения в глобальной системе координат. В этом случае запрещенные степени свободы можно сразу исключить и формировать систему уравнений (П3.3) только относительно незапрещенных (активных) степеней свободы. Указанное исключение удобно выполняется с помощью индексных массивов (П3.1). Признаком запрещения  $k$ -го обобщенного перемещения в элементе  $e$  можно положить  $N_k^e \leq 0$ .

Подпрограмма формирования разрешающих уравнений МКЭ FORM имеет следующие формальные параметры:

$N$  — число обобщенных узловых перемещений конечного элемента, равно размерности вектора столбца  $q^e$ ;  $SE(N, N)$  — двумерный массив, содержащий коэффициенты матрицы жесткости конечного элемента  $K^e$ ;  $PE(N)$  — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца приведенных узловых сил конечного элемента  $P^e$ ;  $LIN(N)$  — индексный массив глобальной нумерации обобщенных узловых перемещений конечного элемента, соответствует индексному массиву  $N^e$  (П3.1);  $NB$  — целое число, указывающее полуширину ленты алгебраической системы, равно наибольшей разности номеров в индексных массивах  $N^e$  (среди всех элементов) плюс 1. Для примера рис. П3.1, а  $NB=6$ ; для примера рис. П3.2, а  $NB=10$ ;  $SK(1)$  — одномерный массив, в котором формируется матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений МКЭ, соответствует матрице жесткости конструкции. В головной программе размерность массива  $SK$  должна быть объявлена конкретно  $SK(L)$ , где  $L$  — целое число, которое больше или равно  $NB \times NZ$ ,  $NZ$  — число уравнений в разрешающей системе (равно суммарному числу незапрещенных обобщенных узловых перемещений конструкции). При формировании массива  $SK$  элемент глобальной матрицы жесткости с номером строки  $i$  и номером столбца  $j$  (в глобальной нумерации) занимает место  $m$  в одномерном массиве  $SK$   $m=b(i-1)+k$ , где  $k=j-i+1$ ,  $b=NB$ . При этом в силу симметрии МЖК формируется только верхняя полулента системы;  $R(1)$  — одномерный массив, в котором формируется вектор-столбец узловых сил (вектор-столбец свободных членов в правой части разрешающей системы алгебраических уравнений). В головной программе размерность массива  $R$  должна быть объявлена конкретно  $R(L)$ , где  $L$  — целое число, которое больше или равно  $NZ$  (число уравнений в системе).

Подпрограмма формирования вызывается в цикле обработки отдельных конечных элементов. Перед началом формирования массивы SK и R следует обнулить.

Текст подпрограммы FORM

```

SUBROUTINE FORM (N, SE, PE, LIN, NB, SK, R)
  DIMENSION SE(N, N), PE(N), LIN(N), SK(1), R(1)
  DO 1 I=1, N
    IS=LIN(I)
    IF(IS) 1, 1, 3
  3 R(IS)=R(IS)+PE(I)
  DO 2 J=1, N
    JS=LIN(J)
    IF(JS) 2, 2, 4
  4 CONTINUE
    K=JS-IS+1
    IF(K) 2, 2, 5
  5 M=NB*(IS-1)+K
    SK(M)=SK(M)+SE(I, J)
  2 CONTINUE
  1 CONTINUE
  RETURN
END

```

Подпрограмма SOLV — подпрограмма решения симметричной ленточной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, ее можно применять для решения сформированной подпрограммой FORM системы уравнений.

Формальные параметры подпрограммы:

SK, R, NB — даны в описании формальных параметров для подпрограммы FORM; NZ — число уравнений в системе.

После работы подпрограммы SOLV решение располагается в массиве R.

Текст подпрограммы SOLV

```

SUBROUTINE SOLV (SK, R, NB, NZ)
  DIMENSION SK(1), R(1)
  DO 5 N=1, NZ
    I=N
    NNB=NB*(N-1)
    DO 4 L=2, NB
      I=I+1
      INB=NB*(I-1)
      NL=NNB+L
      N1=NNB+1
      IF(SK(NL)) 1, 4, 1
    1 C=SK(NL)/SK(N1)
      J=0
      DO 3 K=L, NB
        J=J+1
        NK=NNB+K
        IF(SK(NK)) 2, 3, 2
      2 IJ=INB+J
        SK(IJ)=SK(IJ)-C*SK(NK)
      3 CONTINUE
      SK(NL)=C
      R(I)=R(I)-C*R(N)
    4 CONTINUE
    5 R(N)=R(N)/SK(N1)
    N=NZ
    6 N=N-1
    IF(N) 10, 10, 7
    7 L=N
    NNB=NB*(N-1)

```

```

DO 9 K=2, NB
L=L+1
NK=NNB+K
IF (SK(NK)) 8, 9, 8
8 R(N)=R(N)-SK(NK)*R(L)
9 CONTINUE
GOTO 6
10 RETURN
END

```

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### ПОДПРОГРАММЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПОЛУЧЕНИЯ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ОДНОМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Подпрограмма MFR на основе интегрирования канонической системы методом Рунге—Кутты (по четырехточечной схеме) осуществляет заполнение матрицы фундаментальных решений и вычисление вектор-столбца частного решения (см. (1.109) и разд. 5.1.6). Согласно методу Рунге—Кутты для системы дифференциальных уравнений  $Y' = AY + H$  на шаге интегрирования  $[x, x+s]$  выполняются следующие вычисления

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= A(x)Y(x) + H(x); \\
 Z &= Y(x) + Y_1 s/2; \\
 Y_2 &= A(x+s/2)Z + H(x+s/2); \\
 Z &= Y(x) + Y_2 s/2; \\
 Y_3 &= A(x+s/2)Z + H(x+s/2); \\
 Z &= Y(x) + Y_3 s; \\
 Y_4 &= A(x+s)Z + H(x+s); \\
 Y(x+s) &= Y(x) + (Y_1 + 2(Y_2 + Y_3) + Y_4)s/6.
 \end{aligned}$$

В подпрограмме одновременно интегрируется  $N$  единичных задач Коши при  $H=0$  и одно частное решение при нулевых начальных условиях.

Формальные параметры подпрограммы MFR:

$X0, XK$  — начальная и конечная координаты  $x$  отрезка интегрирования  $x_0$  и  $x_k$ ;  $AA(1)$  — массив, в котором последовательно располагаются коэффициенты матриц разрешающей системы, вычисленные при  $x_0, x_{cp} = (x_0 + x_k)/2, x_k$ . Коэффициенты матриц  $A(x_0), A(x_{cp}), A(x_k)$  упорядочены в одномерном массиве  $AA$  по столбцам. В вызывающей подпрограмме необходимо конкретно указать размерность массива  $AA(L)$ , где  $L \geq 3 \times N^2$ ;  $HH(1)$  — массив, в котором последовательно размещаются коэффициенты вектор-столбцов свободных членов  $H(x_0), H(x_{cp}), H(x_k)$ . В вызывающей подпрограмме конкретно указывается размерность массива  $HH(L)$ , где  $L \geq 3 \times N$ ;  $N$  — число дифференциальных уравнений в системе;  $Y1(1), Y2(1), Y3(1), Y4(1), Z(1)$  — рабочие массивы. В вызывающей подпрограмме указываются размерности массивов  $L \geq N^2 + N$ ;  $AX(1)$  — рабочий массив. В вызывающей подпрограмме размерности массива указывается  $L \geq N^2$ ;  $HX(N)$  — рабочий массив;  $KIN$  — число шагов интегрирования на отрезке  $[x_0, x_k]$ .

В результате работы подпрограммы MFR получим:  
 $Y(1)$  — массив, в котором последовательно по столбцам размещается матрица фундаментальных решений и вектор-столбец частного решения, вычисленные при  $x = x_k$ .

В вызывающей подпрограмме размерность массива  $Y$  указывается  $Y(L)$ , где  $L \geq N^2 + N$ . При работе используются подпрограммы INTP3, DERV.

В подпрограмме INTP3 вычисляются коэффициенты матрицы разрешающей системы  $A$  и вектора свободных членов  $H$  для текущего значения аргумента  $x$  с использованием интерполяционной зависимости  $F(x) = F(x_0)\phi_1 + F(x_{cp})\phi_2 + F(x_k)\phi_3$ , где

$$\phi_1 = 2\xi^2 - 3\xi + 1;$$

$$\phi_2 = -4\xi^2 + 4\xi;$$

$$\phi_3 = 2\xi^2 - \xi;$$

$$\xi = (x - x_0) / (x_k - x_0); F = (A, H).$$

Формальные параметры подпрограммы:  $X$  — текущее значение аргумента  $x$ ;  $X_0, X_k, N, AA, HH$  — описаны ранее для подпрограммы MFR;  $AX, HX$  — массивы, содержащие коэффициенты матрицы  $A(x)$  и вектор-столбца  $H(x)$ .

В подпрограмме DERV вычисляются производные для процедур интегрирования матрицы фундаментальных решений и частного решения. Формальные параметры:  $DY$  — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца производных (для всех решаемых задач Коши;  $AX, HX$  — описаны ранее для подпрограммы INTP3;  $N$  — см. MFR;  $Y$  — текущий вектор состояния (для всех решаемых задач Коши).

Подпрограмма STF вычисляет матрицу жесткости одномерного конечного элемента и вектор-столбец приведенных узловых сил. В алгоритме используются зависимости (1.112), (1.113).

Формальные параметры подпрограммы STF:  $Y, N$  — описаны ранее для подпрограммы MFR;  $M = N/2; N_1 = N + 1; R1(M, M), R2(M, M)$  — рабочие массивы;  $SE(N, N)$  — массив, содержащий коэффициенты матрицы жесткости;  $PE(N)$  — массив, содержащий коэффициенты вектор-столбца приведенных узловых сил.

В подпрограмме STF используется подпрограмма обращения матрицы MATIN (Приложение 2).

Тексты подпрограмм

```
SUBROUTINE MFR (X0, XK, AA, HH,
* N, Y1, Y2, Y3, Y4, Z, AX, HX, KIN, Y)
  DIMENSION AA(1), HH(1), Y1(1), Y2(1),
* Y3(1), Y4(1), Z(1), AX(1), HX(1), Y(1)
  KK = N * N + N
  S = (XK - X0) / KIN
  S2 = S / 2.
  S6 = S / 6.
  X = X0
  DO 2 I = 1, KK
2 Y(I) = 0.
  DO 3 I = 1, N
  L = I + N * (I - 1)
3 Y(L) = 1.
  CALL INTP3 (X, X0, XK, N, AA, HH, AX, HX)
  DO 7 INT = 1, KIN
  CALL DERV (Y1, AX, Y, HX, N)
  DO 4 I = 1, KK
4 Z(I) = Y(I) + Y1(I) * S2
  X = X + S2
  CALL INTP3 (X, X0, XK, N, AA, HH, AX, HX)
  CALL DERV (Y2, AX, Z, HX, N)
  DO 5 I = 1, KK
5 Z(I) = Y(I) + Y2(I) * S2
  CALL DERV (Y3, AX, Z, HX, N)
  DO 6 I = 1, KK
```

```

6 Z(I)=Y(I)+Y3(I)*S
  X=X+S2
  CALL INTP3 (X, X0, XK, N, AA, HH, AX, HX)
  CALL DERV (Y4, AX, Z, HX, N)
  DO 7 I=1, KK
7 Y(I)=Y(I)+(Y1(I)+2.*(Y2(I)+Y3(I))+Y4(I))*S6
  RETURN
END
SUBROUTINE INTP3 (X, X0, XK, N, AA, HH, AX, HX)
  DIMENSION AA(1), HH(1), AX(1), HX(N)
  DL=XK-X0
  T=(X-X0)/DL
  T2=T*T*2.
  F1=T2-3.*T+1.
  F2=-2.*T2+4.*T
  F3=T2-T
  NN=N*N
  DO 1 I1=1, NN
  I2=I1+NN
  I3=I2+NN
1 AX(I1)=AA(I1)*F1+AA(I2)*F2+AA(I3)*F3
  DO 2 I1=1, N
  I2=I1+N
  I3=I2+N
2 HX(I1)=HH(I1)*F1+HH(I2)*F2+HH(I3)*F3
  RETURN
END
SUBROUTINE DERV (DY, AX, Y, HX, N)
  DIMENSION DY(1), AX(1), Y(1), HX(1)
  K=N*N
  DO 1 I=1, K
1 DY(I)=0.
  DO 2 I=1, N
  K=K+1
2 DY(K)=HX(I)
  N1=N+1
  L=-N
  DO 3 K=1, N1
  L=L+N
  DO 3 I=1, N
  IJ=I-N
  KI=L+I
  D=DY(KI)
  DO 4 J=1, N
  IJ=IJ+N
  MJ=L+J
4 D=D+AX(IJ)*Y(MJ)
3 DY(KI)=D
  RETURN
END
SUBROUTINE STF(Y, N, M, N1, R1, R2, SE, PE)
  DIMENSION Y(N, N1), R1(M, M), R2(M, M),
* SE(N, N), PE(N)
  DO 1 J=1, M
  JM=J+M
  DO 1 I=1, M
1 R1(I, J)=Y(I, JM)
  CALL MATIN (R1, R2, M)
  DO 3 I=1, M
  IM=I+M

```

```

DO 3 J=1, M
JM=J+M
A=0.
D=0.
SE(I, JM)=-R2(I, J)
SE(IM, J)=-R2(J, I)
DO 2 L=1, M
LM=L+M
A=A+R2(I, L)*Y(L, J)
2 D=D+Y(IM, LM)*R2(L, J)
SE(I, J)=A
3 SE(IM, JM)=D
DO 4 I=1, M
A=0.
DO 5 J=1, M
5 A=A-R2(I, J)*Y(J, N1)
4 PE(I)=A
DO 6 I=1, M
IM=I+M
A=-Y(IM, N1)
DO 7 J=1, M
JM=J+M
7 A=A-Y(IM, JM)*PE(J)
6 PE(IM)=A
RETURN
END

```

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем.— М.: Машиностроение, 1978.— 311 с.
2. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1984.— 264 с.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.— М.: Наука, 1974.— 448 с.
4. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет.— М.: Высшая школа, 1984.— 391 с.
5. Бате К.-Ю., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М.: Стройиздат, 1982.— 494 с.
6. Бинерджи П., Баттерфильд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках.— М.: Мир, 1984.— 494 с.
7. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика.— М.: Машиностроение, 1977.— 488 с.
8. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.— 376 с.
9. Быков Е. В., Попов Б. Г. Расчет многослойных оболочечных конструкций с учетом деформаций поперечных сдвигов // Расчеты на прочность. Сб. статей. Вып. 30.— М.: Машиностроение, 1989.— С. 66-87.
10. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.— М.: Мир, 1987.— 542 с.
11. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1988.— 272 с.
12. Виноградов Ю. И., Клюев Ю. И. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки при сосредоточенном нагружении // Изв. вузов. Сер. Машиностроение.— 1973.— № 11.— С. 5-9.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 496 с.

14. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин.— М.: Машиностроение, 1988.— 288 с.
15. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ.— Киев: Вища школа, 1979.— 280 с.
16. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ.— Киев: Вища школа, 1983.— 286 с.
17. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.— 541 с.
18. Зиновьев П. А. Расчет конструкций из композиционных материалов.— М.: МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1982.— 63 с.
19. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.— 415 с.
20. Ли С. В., Пиан Т. Х. Х. Усовершенствование метода расчета конечных элементов для пластинок и оболочек с помощью смешанного подхода // РТК.— 1978.— Т. 16, № 1.— С. 38-45.
21. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник.— М.: Машиностроение, 1981.— 212 с.
22. Новицкий В. В. Прочность и проектирование конструкций из композиционных материалов.— М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1984.— 300 с.
23. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращений из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1977.— 144 с.
24. Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов / В. В. Васильев, А. А. Добряков, А. А. Дудченко и др.— М.: МАИ, 1985.— 218 с.
25. Попов Б. Г. Коррекция ранга матрицы жесткости конечного элемента // Изв. вузов. Сер. Машиностроение.— 1984.— № 12.— С. 3-6.
26. Попов Б. Г., Раман Э. В. Об одном подходе к решению задач статики многослойных оболочек вращения // Прикладная механика.— 1984.— Т. 20, № 7.— С. 59-65.
27. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций.— М.: Судостроение, 1977.— 279 с.
28. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шутьга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.— Киев: Вища школа, 1986.— 191 с.
29. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике.— М.: Мир, 1985.— 589 с.
30. Рикардс Р. Б. МКЭ в теории оболочек и пластин.— Рига: Зинатне, 1988.— 284 с.
31. Розин Л. А. Теоремы и методы статики деформируемых систем: Учеб. пособие.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.— 276 с.
32. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений.— Киев: Будівельник, 1974.— Вып. 24.— С. 147—156.
33. Строительная механика летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев и др.; Под ред. И. Ф. Образцова.— М.: Машиностроение, 1986.— 536 с.
34. Тарнапольский Ю. М., Кинцис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков.— М.: Химия, 1981.— 272 с.
35. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники.— М.: Машиностроение, 1988.— 390 с.
36. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.— М.: Наука, 1973.— 399 с.
37. Филин А. П. Элементы теории оболочек.— Л.: Стройиздат, Ленингр. отделение, 1987.— 384 с.
38. Bathe K.-J. The finite element procedures in engineering analysis.— Englewood Cliffs.— N. J.: Prentice-Hall, 1982.— 615 p.
39. Oden J. T., Carey G. F. Finite elements Mathematical aspects.— Englewood Cliffs.— N. J.: Prentice-Hall.— 1983.— Vol. 4.— 195 p.

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .                                                                                             | 3  |
| 1. Вариационно-матричные формулировки задач механики твердого деформируемого тела . . . . .                       | 5  |
| 1.1. Принцип возможных перемещений . . . . .                                                                      | 5  |
| 1.1.1. Формулировка принципа. Линейная задача статики . . . . .                                                   | 5  |
| 1.1.2. Метод перемещений для линейно-упругого тела . . . . .                                                      | 8  |
| 1.1.3. Решение задач статики методами Рэлея — Ритца и конечных элементов . . . . .                                | 11 |
| 1.1.4. Решение задач динамики . . . . .                                                                           | 14 |
| 1.2. Принцип возможных изменений напряженного состояния и вариационные формулировки смешанного типа . . . . .     | 17 |
| 1.2.1. Принцип возможных изменений напряженного состояния . . . . .                                               | 17 |
| 1.2.2. Независимые перемещения и напряжения . . . . .                                                             | 20 |
| 1.2.3. Независимые перемещения и деформаций. Согласованность аппроксимаций . . . . .                              | 22 |
| 1.3. Вариационно-матричный способ получения канонических систем и матриц жесткости для одномерных задач . . . . . | 25 |
| 1.3.1. Преобразования вариационных формулировок . . . . .                                                         | 25 |
| 1.3.2. Алгоритм получения канонических систем и матриц жесткости . . . . .                                        | 31 |
| 1.3.3. Свойства симметрии . . . . .                                                                               | 32 |
| 1.3.4. Особенности численной реализации . . . . .                                                                 | 33 |
| 1.4. Линеаризованные формулировки . . . . .                                                                       | 35 |
| 1.4.1. Линеаризованная формулировка принципа возможных перемещений для нелинейных систем . . . . .                | 35 |
| 1.4.2. Вариант метода перемещений . . . . .                                                                       | 39 |
| 1.4.3. Приложения к одномерным системам . . . . .                                                                 | 40 |
| 1.4.4. Получение канонических систем для задач устойчивости и колебаний . . . . .                                 | 42 |
| 1.5. Примеры . . . . .                                                                                            | 44 |
| 2. Основные уравнения и модели деформирования многослойных оболочек . . . . .                                     | 65 |
| 2.1. Основные геометрические характеристики гладких поверхностей . . . . .                                        | 66 |
| 2.1.1. Поверхность общего вида . . . . .                                                                          | 66 |
| 2.1.2. Поверхность вращения . . . . .                                                                             | 69 |
| 2.2. Связь деформаций с перемещениями . . . . .                                                                   | 72 |
| 2.3. Уравнения равновесия . . . . .                                                                               | 76 |
| 2.4. Соотношения упругости . . . . .                                                                              | 80 |
| 2.4.1. Общий случай анизотропии . . . . .                                                                         | 80 |
| 2.4.2. Свойства упругой симметрии . . . . .                                                                       | 83 |
| 2.4.3. Ортотропный материал . . . . .                                                                             | 85 |
| 2.4.4. Трансверсально несжимаемый ортотропный материал . . . . .                                                  | 89 |
| 2.5. Модели деформирования многослойных оболочек . . . . .                                                        | 93 |
| 2.5.1. Энергетические оценки моделей деформирования . . . . .                                                     | 93 |
| 2.5.2. Кинематические и статические гипотезы . . . . .                                                            | 95 |



|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.5.3. Формулировка линейных двумерных задач статики и термоупругости                                                 | 99  |
| 2.5.4. Линеаризованные формулировки и задачи устойчивости                                                             | 106 |
| 2.6. Примеры                                                                                                          | 112 |
| 3. Композитные стержни, балки и стержневые конструкции                                                                | 125 |
| 3.1. Стержневые элементы ферменных конструкций                                                                        | 126 |
| 3.1.1. Кинематика деформирования и жесткостные характеристики                                                         | 126 |
| 3.1.2. Матрица жесткости и приведенные узловые силы конечного элемента ферменной конструкции                          | 129 |
| 3.1.3. Преобразования характеристик конечного элемента для плоских и пространственных систем                          | 131 |
| 3.1.4. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости                                                                      | 135 |
| 3.1.5. Подпрограмма обработки результатов расчета                                                                     | 136 |
| 3.1.6. Особенности деформирования цилиндрического многослойного стержня несимметричной структуры                      | 137 |
| 3.2. Композитные балки                                                                                                | 140 |
| 3.2.1. Изгиб и растяжение композитных стержней                                                                        | 140 |
| 3.2.2. Конечный элемент композитной балки                                                                             | 146 |
| 3.2.3. Изгиб цилиндрического полого стержня                                                                           | 147 |
| 3.2.4. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости                                                                      | 154 |
| 3.3. Устойчивость многослойных стержней                                                                               | 156 |
| 3.3.1. Вычисление матрицы приведенных начальных усилий для многослойного стержня                                      | 156 |
| 3.3.2. Устойчивость цилиндрического полого стержня                                                                    | 159 |
| 3.4. Расчет конического отсека ферменной конструкции                                                                  | 160 |
| 3.5. Стержневые конечные элементы подкреплений                                                                        | 164 |
| 4. Многослойные панели и пластины                                                                                     | 170 |
| 4.1. Уравнения теории многослойных панелей и пластин                                                                  | 171 |
| 4.2. Изгиб многослойных свободно опертых прямоугольных панелей и пластин                                              | 175 |
| 4.2.1. Общий случай                                                                                                   | 175 |
| 4.2.2. Изгиб тонких панелей                                                                                           | 178 |
| 4.2.3. Изгиб многослойных симметричных пластин                                                                        | 180 |
| 4.2.4. Программа вычисления напряженно-деформированного состояния многослойной свободно опертой панели                | 182 |
| 4.3. Решение задачи об изгибе тонкой многослойной симметричной прямоугольной пластины методом разделения переменных   | 185 |
| 4.4. Конечный элемент многослойной панели                                                                             | 188 |
| 4.4.1. Теоретическое описание                                                                                         | 188 |
| 4.4.2. Подпрограмма вычисления матрицы жесткости                                                                      | 196 |
| 4.5. Устойчивость многослойных пластин                                                                                | 202 |
| 4.5.1. Вариационные формулировки задачи устойчивости многослойной пластины                                            | 202 |
| 4.5.2. Устойчивость толстой свободно опертой многослойной пластины                                                    | 204 |
| 4.5.3. Устойчивость тонкой свободно опертой пластины                                                                  | 208 |
| 4.5.4. Подпрограмма вычисления критических сжимающих нагрузок для прямоугольных свободно опертых многослойных пластин | 210 |
| 4.6. Определение приведенных жесткостных характеристик континуальных моделей регулярных ферменных балок и панелей     | 212 |
| 5. Многослойные оболочки                                                                                              | 216 |
| 5.1. Статика многослойных оболочек вращения                                                                           | 216 |
| 5.1.1. Вариационно-матричный способ получения канонических систем дифференциальных уравнений                          | 216 |
| 5.1.2. Подпрограмма получения канонической системы дифференциальных уравнений                                         | 221 |

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1.3. Тонкие многослойные оболочки . . . . .                                                                                      | 222 |
| 5.1.4. Учет деформаций поперечных сдвигов . . . . .                                                                                | 224 |
| 5.1.5. Учет деформаций поперечных сдвигов и изменения метрических характеристик . . . . .                                          | 226 |
| 5.1.6. Подпрограмма вычисления матриц жесткости кольцевых оболочечных элементов . . . . .                                          | 227 |
| 5.2. Устойчивость и колебания многослойных оболочек вращения . . . . .                                                             | 230 |
| 5.2.1. Получение канонических систем дифференциальных уравнений . . . . .                                                          | 230 |
| 5.2.2. Подпрограмма получения канонической системы для решения задач на собственные значения . . . . .                             | 233 |
| 5.2.3. Устойчивость и колебания тонких многослойных оболочек . . . . .                                                             | 234 |
| 5.2.4. Учет деформаций поперечных сдвигов . . . . .                                                                                | 235 |
| 5.2.5. Учет деформаций поперечных сдвигов и изменения метрических характеристик . . . . .                                          | 235 |
| 5.2.6. Подпрограмма вычисления приведенных инерционных характеристик многослойного пакета . . . . .                                | 235 |
| 5.3. Расчет цилиндрических оболочек . . . . .                                                                                      | 236 |
| 5.3.1. Задача статики свободно опертой многослойной цилиндрической оболочки . . . . .                                              | 236 |
| 5.3.2. Подпрограмма определения напряженно-деформированного состояния многослойной цилиндрической оболочки . . . . .               | 241 |
| 5.3.3. Осесимметричное деформирование многослойных цилиндрических оболочек . . . . .                                               | 243 |
| 5.3.4. Устойчивость цилиндрических оболочек . . . . .                                                                              | 252 |
| 5.3.5. Подпрограмма вычисления критических значений осевого сжатия и внешнего давления . . . . .                                   | 256 |
| 5.4. Условия сопряжения многослойных оболочек вращения с кольцевыми подкрепляющими элементами . . . . .                            | 259 |
| 5.5. Треугольный шестиузловой конечный оболочечный элемент смешанного типа . . . . .                                               | 267 |
| Приложение 1. Подпрограммы квадратурных формул . . . . .                                                                           | 271 |
| Приложение 2. Подпрограммы матричной алгебры . . . . .                                                                             | 277 |
| Приложение 3. Процедуры формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений МКЭ . . . . .                              | 281 |
| Приложение 4. Подпрограммы интегрирования канонических систем и получения матриц жесткости одномерных конечных элементов . . . . . | 286 |
| Список литературы . . . . .                                                                                                        | 289 |

## **БИБЛИОТЕКА**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Борис Глебович Попов*

### **РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВАРИАЦИОННО-МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ**

Редактор *В. А. Солдатенков*

Художник *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *В. С. Рябова*

Корректоры: *О. В. Калашникова, Л. И. Малютина*

|                                                    |                             |                         |
|----------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Сдано в набор 30.03.93                             | Подписано в печать 23.06.93 | ЛР № 020523 от 23.04.92 |
| Формат бумаги 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> . | Бум. тип.                   | Литературная гарнитура  |
| Высокая печать.                                    | Усл. печ. л. 18,5           | Уч.-изд. л. 21,07       |
| Тираж 1000 экз.                                    | Заказ 1490                  |                         |

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ  
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403